

pp 15
(15) p 15
19



M.A. LIBRARY, A.M.U.



PE3384

فصل اول

الف - مراجعہ بدریں نامی پیش

۱- پیش از شروع به برنامه امسال باید بوسیله حل مسئله نامی پیش بدریں نامی پیش سال پیش مراجعہ شود. درجا بامی که لازم باشد بعضی از دستورات نامی فہم رکازہ در کتاب اول گشتہ شدہ است یا دآوری میکنیم:

تمرین

۱- معلوم کنید کہ این تساوی وقتیکہ $x = 2$ جہت صحیح است یا نیست

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+2x+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

۲- چہ تفاوتی بین دو عدد ۳ و ۲ درین عبارت $2x^2 - 3x + 1$ و $3x^2 - 2x + 1$ میباشد

۳- ضرب $a + b$ در عبارت $a + b$ چہ میسازد

$$a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

۴- ضرب a را درین عبارت بدست آورید

-۲-

$$2ab - 4a + 7ax$$

۵- عبارت های زیر را بر حسب حرف x مرتب کنید

$$ax^2 - 2bx + x^2 - cx + 2y^2 - 4a^2$$

$$x^2 - 2x^2 + ax^2 - xy + y^2 - 1$$

۶- مجموع عبارت های زیر را بدست آورید و صحت نتیجه را وقتی که $x=1$

$y=-2$ و $z=-1$ است تحقیق کنید:

$$x^2 - 2y + 2z$$

$$2x^2 + 5y - 6z + 2$$

$$-4x^2 + 2y + 5z - 5$$

۷- مانده تفریق های زیر را بدست آورید:

$$7a^2 - 3b^2 \quad \text{از} \quad -2a^2 + 4b^2$$

$$1 + 3x - 4y + 5z \quad \text{از} \quad 2x + y - 2z$$

$$2ax^2 - 5x + a - 1 \quad \text{عبارت}$$

$$-2ax^2 + 7x - 2a + 2$$

را از

تفریق کنید و بفرض $x=-3$ و $a=2$ درستی نتیجه را تحقیق کنید.

۹- حاصل جمع عبارت های $5(x+y)^2$ و $6(x+y)^2$

$(x+y)^2 - 2(x+y)$ را حساب کنید از روی آن حاصل جمع $(x+y)^2 - 2(x+y)$ را بدست آورید.

قاعده ضرب - اولاً - حاصل ضرب دو یا چند کلمه خود یک کلمه است که ضریب عددیش حاصل ضرب ضریبهای عددی آن یک جمله باشد (باقید نشانه) بوده و تمام حرفهای آن یک جمله را دارا باشد نمای هر یک از این حرفها مساوی مجموع نمایست که آن حرف دیگر کلمه دارد مثلاً - برای ضرب کلمه در چند جمله یک جمله مفروض را در هر یک از جمله های چند جمله ضرب کرده حاصل ضربهای جز را با هم جمع جبری میکنیم. مثلاً - برای ضرب دو چند جمله باید هر یک از جمله های یکی از آنها را در کلیت جمله های چند جمله دیگر ضرب نموده حاصل ضربهای جز را جمع جبری نمود.



تمرین

۱- حاصل ضرب سازه های زیر را بدست آورید :

$$a^5 \cdot (-a^4) \cdot a^7 \quad x^n \cdot x^m \quad x^0 \cdot (-x)$$

$$x^a \cdot x^{a+r} \quad a^{n+1} \cdot a^{n-1}$$

$$x^2 \cdot x^4 \cdot x \cdot (-x)^3 \quad x^2 y \cdot x^2 \cdot x^2 y^2 \cdot x^2 \cdot x y^2$$

$$2^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 2^2 \quad 2^2 \times (-2^2) \times (-2^2)$$

$$x^{a+b} \cdot x^{a-b} \cdot x^{-a}$$

$$2(a+b) \cdot \frac{1}{2} (a+b)$$

$$x(y-a+b) \cdot x^2(y-a+b)^2$$

$$(2a-5)(2a+6)$$

$$(2x^2-2x+5)(x^2-5x+6)$$

$$(x^2-ax+a^2)(x^2-a^2+ax)$$

$$(a^3-a^2+a)(ax+x+ax)$$

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$

۱۱- اگر تساوی $ax(a+2)+a(10-a^2)=x+2$ بجای x

عدد $a=3$ را قرار دهیم تساوی برقرار است یا نیست؟

قاعده تقسیم - اولاً در تقسیم کجبه بر یک جمله برای تعیین سادترین عبارت بجهر $\frac{A}{B}$ کافیت که بخشی A و بخش یاب B را بر سازد می مشترکشان تقسیم کنیم ثانیاً در تقسیم چند جمله بر یک جمله برای بخش را بر بخش یاب تقسیم نموده بهرهای جز را جمع جبری مینماییم ثالثاً در تقسیم و چند جمله پس از ساده کردن آنها هر یک را نسبت توانایی

نزولی یا صعودی یکی از ضرایب مرتب نموده به راه زیر عمل می‌نماییم:

جمله اول بخشی را بر جمله اول بخش یاب قسمت نموده بهر را در تمام جمله های بخش یاب ضرب می‌نماییم و حاصل را از جمله های بخشی کم می‌کنیم تا نخستین مانده بدست آید از نو جمله اول مانده را بر جمله اول بخش یاب قسمت نموده بهر را در تمام جمله های بخش یاب ضرب می‌نماییم و حاصل را از جمله های این مانده کم می‌کنیم تا دومین مانده بدست آید و بهین راه عمل را ادامه می‌دهیم تا با مانده صفر و یا با مانده ای برسیم که درجه اش از درجه بخش یاب کمتر باشد.

تمرین

۱۲- مطلوبت تعیین سازد و ترین صورت برای زیر:

$$\frac{2xy^2}{xy} = \frac{-a^{2+6} + a^{2n}}{a^2}$$

$$\frac{xy^2 - y^2}{-y}$$

$$\frac{-x^2y^6}{x^2y} = \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x - 2}$$

$$\frac{18x^2 + 69xy - 16y^2}{9x - 15y}$$

$$\frac{6x^6 - 5x^4 + 25x^3 - 17x^2}{5x^2 - 2x^3}$$

$$\frac{2a^2 - 12a^2 - 2 + 11a - 7a^3}{1 - 3a - 2a^2}$$

$$\frac{a^2b^2 + 18c^2 + 12a - 3abc}{ab + 2c + 5}$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz}{x + y + z}$$

$$\frac{4a^4 + 4a^2 + 2a + 2}{x + x^2 + x^3 - x^{2a+1}}$$

$$\frac{a^4x + 4 - 16a^2}{a^{2+1} + 2a}$$

۱۳- عبارت $a^2 - 7a + 12$ را بر $a - 2$ تقسیم کنید و بفرض $a = -2$

درستی عمل را امتحان کنید.

قاعده برداشتن و گذاشتن پرانتزها - نخست - میتوان پرانتزی را که در جلوی آن نشانه + است حذف نمود درین صورت نشانه جمله با تغییر نمیکند دوم - اگر جلوی پرانتز - باشد پس از برداشتن پرانتز باید نشانه جمله بای درون پرانتز را تغییر داد

سوم - همواره میتوان یک چند جمله درون پرانتزی که دارای نشانه + است نوشت :

چهارم - نیز میتوان یک چند جمله را پس از تغییر دادن نشانه جمله بای آن در داخل پرانتزی که دارای نشانه - است نوشت .

تمرین

۱۴ - در عبارتهای زیر پرانتزها را برداشته آنها را ساده کنید :

$$5 + 6 - (-5 + 3) + (-6 - 2) + 10 - 3$$

$$8a + (2y - 8a + 2) - (2y - 3a + 2)$$

$$a - 4 - (6 - 2a) - [2(6 - a + 4) - 2(6 - 46)]$$

$$6a - [-(y - 2z) + (2z - 4y) - (4y - 3a)]$$

$$7a - 2(a - 2) - 2[a - 2(4 - 2a) + 8]$$

$$2x^2 + 7x - (2x + 1)(3x + 2)$$

$$(a - b - 2) - (b + a - 2) - \{ -(2b + 4) + a - b \}$$

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 1) - (x - 2)(x^2 + 2x + 1)$$

۱۵- عبارتهای زیر را درون پرانتزی بزرگ که جلوی آن - باشد:

$$-a + 2x \quad 2x^2 - (a - x) \quad 2a^2 - b + x - (a^2 + b - x)$$

اتحادهای مهم

$$(۱) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(۲) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(۳) (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$(۴) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(۵) (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(۶) (a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

$$(۷) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(۸) (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

اگر a و b را طول دو قطعه خط فرض کنیم طرف اول اتحاد (۱) مساحت مربعی است بضلع $a + b$ و از روی شکل دید می شود که مساحت این مربع

a	a ²	ab
b	ab	b ²

مساویت مجموع مساحت های دو مربع و دو مستطیل که اضلاع آن دو مربع مساوی a و b و دو مستطیل مساوی بوده و ضلعهای a و b میباشد.

تمرین

۱۶- درستی اتحاد های دوم و سوم و چهارم، اینینه بهین را ده بندی ثابت کنید

پرسش های شفاهی

حاصل عبارتهای زیر را بگویند :

$$(a + 4)^2$$

$$(2x + 5)^2$$

$$(x - 3)^2$$

$$(2a - 5)^2$$

$$(2a - 6b)^2$$

$$(x^2 + 3x)^2$$

$$(20 - 4b)^2$$

$$(ab - 2cd)^2$$

$$\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b\right)^2$$

$$(x - a)(x + a)$$

$$(2a - 1)(2a + 1)$$

$$(ab - c)(c + ab)$$

$$(6x + y)(y - 6x)$$

$$(x + 3)(x + 4)$$

$$(x - 2)(x - 7)$$

$$(a + 6)(a - 7)$$

$$(xy-2)(xy+5) \quad (3x+1)(3x+4)$$

$$(x+y+1)^2 \quad (x-y-1)^2$$

$$(a+2)^2 \quad (a-x)^2 \quad (1-a)^2$$

$$(a+2b)^2 \quad (2x-2b)^2$$

تمرین

۱۷- حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

$$[(a+b)+1][(a+b)-1]$$

$$(x-y+2)(x-y-2)$$

$$(a+x+\sqrt{x})(a+x-\sqrt{x})$$

$$(\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1})^2$$

$$(2x-y+z)(2x-x+y)$$

$$\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{c}{4}\right)\left(-\frac{a}{2}+\frac{c}{4}+\frac{b}{4}\right)$$

ب- تعیین مازده تقسیم یک چند جمله بر دو جمله

$$x \pm a$$

۲- اول طریقه تعیین مازده تقسیم بر $a-x$. فرض می کنیم P بخش (چند جمله)

بر حسب x و $a-x$ بخش Q قسمت درست بر R مازده تقسیم باشد برای

اتحاد زیر را خواهیم داشت

$$(۱) \quad P = (x - \alpha) q + R$$

باید دانست که R به x بستگی ندارد زیرا درجه مانده از درجه بخش باید که بر حسب x از درجه اول است) باید کمتر باشد

برای تعیین مانده R کافی است که در اتحاد بالا x را مساوی α بگیریم پس

صورت جمله $(x - \alpha) q$ مساوی صفر شده و R بدست می آید ازینقرار:

و قتیکه x را به α تبدیل کنیم چند جمله P تبدیل به چند جمله ای بر حسب α میشود که آنرا به A بنماییم و چون تساوی (۱) باز بر جمیع مقادیر x برقرار است (زیرا اتحاد)

پس خواهیم داشت $R = A$

یعنی: مانده تقسیم بر چند جمله بر $x - \alpha$ مساوی حاصل آن چند جمله است

بعد از تبدیل نمودن x به α

مثال ۱- میخواهیم مانده تقسیم عبارت $3x^3 - 5x^2 + 2$ را بر $x - 2$

تعیین کنیم

کافی است در چند جمله بخشی بجای x عدد ۲ را قرار دهیم تا مانده بدست

آید از اینقرار:

$$R = 3 \times 2^3 - 5 \times 2^2 + 2 = 24 - 20 + 2 = 6$$

مثال ۲- مانده تقسیم $2x^3 - 25$ را بر $x - 5$ بدست آورید
از روی قاعده بالا خواهیم داشت

$$R = 2 \times 5^3 - 25 = 250 - 25 = 0$$

یعنی $2x^3 - 25$ بر $x - 5$ بخش پذیر است از اینجا چنین برمیآید که:

۳- هرگاه حاصل عبارت بخشی پس از تبدیل کردن x به a
صفر باشد آن بخشی بر $x - a$ بخش پذیر است
پیشش های شفاهی

مانده تقسیم زیر را پیدا کنید:

$$(2x^2 - 1) : (x - 1)$$

$$(x^3 - 8) : (x - 2)$$

$$(x^3 + a^3) : (x - a)$$

$$(2a^3 - b^3) : (a - b)$$

$$(2x^2 - 3y^2) : (x - y)$$

$$(x^5 + y^5) : (x - y)$$

۴- دوم راه تعیین مانده تقسیم بر $x + a$. چون عیناً مطابق شماره

بالا عمل کنیم نتیجه میشود:

مانده تقسیم یک چند جمله بر $x + a$ مساوی حاصل آن چند جمله
است بعد از تبدیل نمودن x به $-a$

و نیز ممکن است همین نتیجه را از روی شماره بالا بدست آورد از نیست:

می‌توانیم $x + a$ را بنویسیم $x - (-a)$ بنا بر این برای تعیین مانده تقسیم کافی است

بجای $x - a$ را قرار دهیم

۵- نتیجه - شرط اینکه یک چند جمله بر $x + a$ بخش پذیر باشد این است که حاصل آن چند جمله پس از تبدیل x به $-a$ - صفر شود - چنانکه چند جمله $xy + axy$ بر $x + a$ بخش پذیر است زیرا

$$R = (-a)^2 y + a(-a)y = ay - ay = 0$$

پرسش های شفاهی

مانده تقسیم های زیر را حساب کنید:

$$(x^3 - 1) : (x + 1) \quad (2x^3 - 5) : (x + a)$$

$$(2x^4 + 5) : (x + 2) \quad (x^6 + y^4) : (x + y)$$

$$(x^5 - y^3) : (x + y) \quad (a^5 + b^3) : (a + b)$$

از آنچه گفتیم نتیجه های زیر بدست می آید:

۶- اول - دو جمله $x^n - a^n$ همواره بر $x - a$ بخش پذیر است

$$R = (a)^n - a^n = 0 \quad \text{زیرا}$$

چنانکه $x^n - a^n$ بر $x - a$ بخش پذیر است و بر $x + a$ است

همچنین $a^n - b^n$ بر $a - b$ بخش پذیر است و بر $a + b$ است

و بطور کلی در تقسیم $x^n - a^n$ بر $x - a$ به چنین است:

$$x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1}$$

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}$$

و یا

پرسش های شفا

در هر یک از تقسیم های زیر بهر ابدست آورید:

$$(x^3 - a^3) : (x - a)$$

$$(x^3 - 8) : (x - 2)$$

$$(x^4 - y^4) : (x - y)$$

$$(x^5 - 6^5) : (x - 6)$$

۷- دوم- دو جمله $x^n - a^n$ وقتی بر $x + a$ بخش پذیر است

که n جفت باشد

$$R = (-a)^n - a^n = 0$$

زیرا با این شرط

و در حالتیکه n تاق باشد بخش پذیر نیست

$$R = (-a)^n - a^n = -2a^n$$

زیرا

و چون تقسیم کنیم در هر دو حالت بهر چند جمله کالی است شامل n جمله که نشانه جمله

یک در میان + و - است:

$$x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \dots$$

پرسش های شفا

در هر یک از تقسیم‌های زیر بهر ابدست آورید و معلوم کنید که در کدام تقسیم مانده صفر است

$$(x^2 - a^2) : (x + a) \qquad (x^2 - 1) : (x + 2)$$

$$(x^2 - a^2) : (x + a) \qquad (x^4 - y^4) : (x + y)$$

۸- سوم- دو جمله $x^n + a^n$ بر $x + a$ بخش پذیر است اگر

n تاق باشد

$$R = (-a)^n + a^n = 0$$

زیرا با این شرط

و اگر n جفت باشد بخش پذیر نیست

$$R = (-a)^n + a^n = 2a^n$$

زیرا

در هر دو حالت بهر چند جمله کاملی است شامل n جمله که نشانه جمله‌های آن یک

در میان + و - است

پرسش‌های شفاهی

در هر یک از تقسیم‌های زیر بهر ابدست آورده و معلوم کنید در کدام تقسیم مانده صفر است

$$(x^2 + a^2) : (x + a) \qquad (a^4 + b^4) : (a + b)$$

$$(x^3 + 1) : (x + 2) \qquad (x^5 + y^5) : (x + y)$$

۹- چهارم- دو جمله $x^n + a^n$ یا $x^n - a^n$ به چه قوت بر $x - a$ بخش پذیر نیست

$$R = a^n + a^n = 2a^n$$

زیرا

و بهر چند جمله کاملی است دارای n جمله از این قرار:

$$x^{n-1} + ax^{n-2} + dx^{n-3} + \dots + a^{n-1}$$

تمرین

۱- در هر یک از تقسیم های زیر بهر دو مانده را بدست آورید:

$2x - 1$	بر	$17x^3 - 1$
$a^3 + b^3$	بر	$a^{15} + b^{15}$
$4x^2 - \frac{a^2}{9}$	بر	$64x^6 - \frac{a^6}{729}$
$xy - 2a$	بر	$x^4y^4 - 16a^4$
$a^4 - b^3$	بر	$a^{16} - b^{12}$
$x + y - a$	بر	$(x + y)^3 - a^3$
$x^3 + y$	بر	$x^{12} - y^4$
$x^m + y^n$	بر	$x^{3m} + y^{3n}$
$x^4 + a^n$	"	$x^{24} - a^{2n}$
$(x + y + a)$	"	$(x + y)^7 + a^7$

۲- ثابت کنید که اگر چند جمله P بر دو جمله های $x - a$ و $x - b$

$x - c$ (بنابر آنکه $a \neq b \neq c$ باشد) بخش پذیر باشد بر حاصل ضربشان نیز بخش

پذیراست

۷- تجزیه چند جمله بسازه های اول (بامراجعه بکتاب اول)

۱۰- مقصود از سازه اول عبارتست درست که جز بر خود و یک
(بدون قید نشانه) بر سازه درست دیگری بخش پذیر نباشد چنانکه $a - b$ بنابرین تجزیه
اول است اگر چه بر $\frac{1}{2}a$ بخش پذیر باشد همین نحو در حساب عدد اول عدد درستی را
گویند که جز بر خود و یک بر عدد درست دیگری بخش پذیر نباشد مانند ۳ که عدد است
اول اگر چه بر $\frac{1}{4}$ قابل قسمت باشد.

تجزیه یک چند جمله عبارت از تبدیل نمودن آن چند جمله است بجا
ضرب چند سازه اول.

نخست - تجزیه چند جمله که جمله های آن دارای سازه مشترکی باشند
دیابصورت $ax + ay + bx + by$ باشد.

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بجا حاصل ضرب سازه های اول تجزیه کنید.

$$2(a+b) - x(a+b) + y(a+b)$$

$$2x(5x-4a) - 9ax(5x-4a)$$

$$۱۲a'(2x-2y) + ۱۸ab(2y-2x)$$

$$ad + ۲dx + ۳az + ۶zx$$

$$akh + ahx - ahx - ahx$$

$$۱h_2 + ۱۶hx - ۶h_2 - ۱۲hx$$

$$۲a' - ۲ax - ac + cx$$

$$mz - ۲z + m\sigma - ۲\sigma + mt - ۲t$$

$$(x-2y)^2 + ۲(x-2y)^2$$

$$۲y^{2x} - y^{2x} + ۲y^x - ۱$$

$$a^{2m} + a^{2m} + a^m + ۱$$

دوم - تجزیه چند جمله‌ای بگونه‌ای صورت $a^2 \pm ۲ab + b^2$ و یا $a^2 - b^2$ می‌باشد

تمرین

۲- چند جمله‌ای زیر را با حاصل ضرب سازه‌های اول تجزیه کنید:

$$ax^2 - y^2 \quad , \quad (a-2)^2 - c^2$$

$$۱۶(x-y)^2 - z^2 \quad , \quad ۴R^2S^2 - (R-S)^2$$

$$x^2(2h-k)^2 - (m-2R)^2$$

$$(x-y)^2 - bx'(2c-a)^2$$

$$R^2 + 2RS + S^2 - (x^2 - 2xy + y^2)$$

$$x^2 - y^2 + 2yz - z^2$$

$$a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$$

$$x^2 + 6x + 9 - y^2 + 2yz - z^2$$

$$4a^2 + 9b^2 - 16x^2 - 25y^2 - 12ab + 4xy$$

$$R^2S^2 + 2RS + 1 - c^2 + 2cd - 2d^2$$

$$121x^2 - 1 - 11y - 11y^2$$

$$x^2 - y^2 + ax + ay$$

$$m+n - m^2 + n^2$$

$$a^2b^2 - 4b^2 - d^2m^2 + 4m^2$$

$$x^2 - y^2 + m$$

$$144x^2 - 121x^2$$

سیوم - چند جمله‌ای یکدلی صورت $x^2 + 6x + 9$ باشند (مراجعه شود به شماره ۱۲۲ کتاب اول یا به مسئله (۲) شماره ۱۱ همین کتاب)

۱۲۲ کتاب اول یا به مسئله (۲) شماره ۱۱ همین کتاب

تمرین

۳- چند جمله‌ای زیر را بساز و نامی اول تجزیه کنید:

$$x^2 + 2x + 12$$

$$5^2 + 65 - 16$$

$$d^2 - 2d - 10$$

$$7^2 - 97 + 14$$

$$z^2 - z - 90$$

$$K^2 - 21K + 20$$

$$1 - 5y + 6y^2$$

$$9 - 10x + x^2$$

$$m^2 - 6mR + 18R^2$$

$$1 + 2ab - 10a^2b^2$$

$$(a+b)^2 - 2(a+b) - 1$$

$$(x-y)^2 + 2(x-y) + 1$$

۴- مطلوبت تجزیه این عبارت $x^4 - 18x^2y^2 + 16y^4$ به ترتیب خواهیم داشت

$$x^4 - 18x^2y^2 + 16y^4 = (x^2 - 4y^2)^2$$

$$= [(x-2y)(x+2y)]^2$$

$$= (x-2y)^2 (x+2y)^2$$

$$x^4 - 18x^2y^2 + 16y^4$$

$$x^4 - 17x^2 + 16$$

$$a^4x - 5a^2x - 6$$

$$S^4 - 10S^2a + 9$$

تجزیه سه جمله $a^4 + a^2b^2 + b^4$ به طور نمونه.

چون یک a^2b^2 بر عبارت بالا بیفزاییم مربع کامل می شود. برای اینکه تغییر ندهد ازین مربع یک a^2b^2 کم میکنیم ازین قرار:

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$$

$$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$$

تمرین

۵- عبارت های زیر را حاصل ضرب ساز و ای اول تجزیه کنید:

$$x^2 + xy^2 + y^3 \qquad m^4 + m^2 + 1$$

$$x^4 - 12x^2y^2 + 16y^4 \qquad 25x^2 - 11x^2 + 1$$

$$16a^4 - 12ab^2 + b^4 \qquad 25x^2 - 19x^2 + 9$$

$$26a^4 - 25ab^2 + 4b^4 \qquad 4a^2 + 1$$

$$64a^2x^2 + x^2 \qquad 4a^2 + 4a^2$$

چهارم- تجزیه عبارت های یک بصورت $a^n \pm b^n$ میباشند.

چنانکه در شماره ۱۶ دیدیم $a^n - b^n$ همیشه بر $a - b$ بخش پذیر است:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

و این عبارت یعنی $a^n - b^n$ بر $a + b$ هم بخش پذیر است اگر n جفت باشد.

چنانکه $a^n - b^n$ بر $a - b$ و $a + b$ هر دو بخش پذیر است:

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + ab^3 + ab^2 + ab + b^4)$$

$$a^6 - b^6 = (a + b)(a^5 - ab^4 + ab^3 - ab^2 + ab - b^5)$$

و $x^3 - y^3$ بر $x - y$ بخش پذیر است و $x + y$ بر $x - y$ بخش پذیر نیست:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

عبارت $a^3 + b^3$ وقتی بر $a + b$ بخش پذیر است که n تاق باشد

و بهیچوقت بر $a - b$ بخش پذیر نیست

چنانکه $a^3 + b^3$ بر $a + b$ بخش پذیر است؛

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

تبصره - برای تجزیه کردن $a^3 - b^3$ بسازه های اول (متسبکه n

جفت باشد) بهتر اینست که اول تا جائیکه ممکن است موافق قاعده تجزیه

$a^3 - b^3$ آن عبارت را تجزیه کرده پس از آن اگر لازم باشد موافق قاعده

بالا عمل را تمام کنیم

مثال ۱ - میخواهیم $a^3 - b^3$ را بسازه های اول تجزیه کنیم

$$a^3 - b^3 = (a^2 - ab + b^2) \times (a + b)$$

$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

و این بسازه ها اولند.

مثال ۲ - میخواهیم $x^4 - y^4$ را بسازه های اول تجزیه کنیم

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

$$= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

$$= (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$$

و این سازه ها اولند.

مثال ۳- عبارتهای $16a^4 - 1$ و $8x^2 + 27$

را بسازه های اول تجزیه کنید.

$$8x^2 + 27 = (2x)^3 + (3)^3 = (2x+3)(4x^2-6x+9)$$

$$16a^4 - 1 = (4a^2-1)(4a^2+1) = (2a+1)(2a-1)(4a^2+1)$$

$$ay^5 + ay^2 = ay^2(y^3 + a^3) = ay^2(y+a)(y^2-ay+a^2)$$

تمرین

۶- عبارتهای زیر را با حاصل ضرب سازه های اول تجزیه کنید:

$$1-x^2$$

$$27-64a^3$$

$$a^5-32$$

$$(x+y)^3 - z^3$$

$$(x+y)^3 + z^3$$

$$x^5 - 128$$

$$a^{10} - b^{10}$$

$$x^{12} - y^{12}$$

$$a^{16} - b^{16}$$

$$a^6 + a^3 - a^2 - a$$

$$b(x^2+a^2) + ax(x^2-a^2) + a^2(x+a)$$

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$$

۱۱- حل بعضی همپندی ها از راه تجزیه.

مسئله ۱- بچندی $x^3 - 3x^2 = 10x$ را حل کنید

$10x$ را بطرف اول برده و سه جمله طرف اول را ب حاصل ضرب سازه های اول تجزیه

میکنیم از بیقرار:

$$x^3 - 3x^2 - 10x = 0$$

$$x(x+2)(x-5) = 0$$

پس ریشه های بچندی بالا عبارتند از ریشه های بچندی های $x=0$ و

$x+2=0$ و $x-5=0$ و بنابراین بچندی بالا دارای سه ریشه ۰

و ۲- و ۵ میباشد

مسئله ۲- بچندی $y^3 + 36y^2 - 13y = 0$ را حل کنید

چون y را به x بنامیم سه جمله طرف اول بصورت $x^3 + 36x^2 - 13x$ درمیآید

برای تجزیه آن کافیت که ۳۶ را ب حاصل ضرب دو عدد که مجموعشان ۱۳- است

تجزیه کنیم و آن دو عدد عبارتند از ۹- و ۴- بنابراین بچندی بالا چنین

میشود:

$$(y^2 - 9)(y - 4) = 0$$

$$(y-3)(y+3)(y-2)(y+2) = 0$$

بنابراین ریشه های این بچندی عبارتند از ریشه های بچندی های $y-3=0$

$$y+2=0 \text{ و } y-2=0 \text{ و } y+2=0 \text{ و } y-2=0 \text{ یعنی:}$$

$$y=-2 \text{ و } y=2 \text{ و } y=-2 \text{ و } y=2$$

قرین

همچندی های زیر را از روی تجزیه حل کنید:

$$x'' - 3x = 0$$

$$x'' - 4x' = 0$$

$$x'' = 64x$$

$$x'' - 16x + 60 = 0$$

$$x'' - ax' - 12ax = 0$$

$$y'' - y + 2 = 2y'$$

$$x'' + 8x = -16$$

$$ax + 2x = a' - 9$$

$$x'' + x' - ax - ax = 0$$

$$y'' - 2y - 6 = 0$$

(چون بجای y عدد ۱ را گذاشتیم سه جمله طرف اول صفر میشود)

$$x'' - 6x' - 16x = -96$$

$$R'' - 26R' = -25$$

$$x'' - x' - x + 1 = 0$$

$$R'' + 2R' + 3R + 1 = 0$$

$$R'' - 2R - 8 = R + 1$$

د- ریشه و ریشگی

۱۲- میدانیم ریشه m ام عدد حسابی A عددیست مانند a که چون آنرا بتوان

$$\sqrt[m]{A} = a$$

رسانیم A بدست آید و آنرا چنین نویسند
 m را شماره ریشه و نشانه $\sqrt{}$ را ریشگی (رادیکال) نامند

مثال- ریشه دوم ۴ و ریشه بیستم ۶۴ بترتیب چنین نوشته میشود:

$$\sqrt[2]{4} = 2 \quad , \quad \sqrt[20]{64} = 2$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} \quad , \quad \sqrt[5]{25} = 2,5$$

۱۳- بعضی عدد ها هستند که نمیتوان ریشه m ام آنها را بدست آورد یعنی هیچ

عددی (درست یا برخه یا ددیه) نمیتوان یافت که توان m امش عدد مفروض شود

چنانکه بیسج عددی نمیتوان یافت که مساوی ریشه دوم هفت باشد یعنی چون آنرا

توان دوم رسانیم ۷ شود و همچنین بیسج عددی یافت نمیشود که مساوی ریشه ششم

۱۱ گردد یعنی توان شوش ۱۱ شود

$\sqrt{7}$ و $\sqrt[3]{11}$ و مانند آنها را گنگ (متم) گویند

ولی همواره ممکن است با تقریب دلخواهی عددی یافت که توان m ام

آن نزدیک بعدد A باشد

$$2 < \sqrt{7} < 3 \quad \text{مثلاً}$$

$$۲,۶ < \sqrt{۷} < ۲,۷$$

$$۲,۶۴ < \sqrt{۷} < ۲,۶۵$$

طرفای بزرگتر را ریشه دوم هفت با تقریب اضافی و طرفای کوچکتر را ریشه دوم هفت با تقریب نقصانی گویند
مثلاً ۲,۷ ریشه دوم هفت است باینکه دهم تقریب اضافی

$$(۲,۷)^2 = ۷,۲۹$$

و ۲,۶۴ ریشه دوم هفت است باینکه دهم تقریب نقصانی

$$(۲,۶۴)^2 = ۶,۹۶۹۶$$

بر عدد که گنگ نباشد گویا (منطق) نامید و میشود مانند ۲۵ و $\sqrt{\frac{۳}{۱۳}}$

$$۳ - \sqrt{۶,۲۵}$$

۱۳- تبصره - اولاً باید دانست که اگر نمیتوان عددی یافت که مساوی عدد گنگی مانند $\sqrt{۲}$ باشد هموار و میتوان (پس از انتخاب یک درازا) آن را با یک خطی نمایش داد مثلاً برای نمایش $\sqrt{۲}$ میتوان سه گوشه ای قائم الزاویه ساخت که دو پهلوئی آن مساوی یک درازا باشد در این صورت نتیجه بخش و تر آن سه گوشه باینکه از دو پهلو عدد گنگ $\sqrt{۲}$ است یعنی با این یک نمک نیست و تر مثلث را بوسیله عددی برخه یاد بدهی نمایش داد.

و همچنین هرگاه شعاع دایره را یک درازا اختیار کنیم نسبت درازای محیط بقطر عدد گنگی میشود که آنرا π نامند.

ثانیا چنانکه دیدیم مقدار تقریبی عدد گنگی را میتوان بعدد دهمی نمایش داد و هرچه بخواسیم میتوانیم بمقدار حقیقی این عدد گنگ نزدیکتر شویم ولی پیکرهای دهمی پیچوقت دوره ندارد زیرا میدانیم هر عدد دهمی دوره تبدیل بیک برنجه میشود و موافق تعریف درنصورت عدد مفروض گنگ نخواهد بود.

مثلا عدد دهمی دوره 272700 گنگ نیست زیرا مساوی برنجه $\frac{3}{11}$ است و همچنین عدد 14285700 مساوی برنجه $\frac{1}{7}$ است پس گنگ نیست

ولی مثلا اگر عدد گنگ $\sqrt{7}$ را بطور تقریب حساب کنیم هرچه باشد مقدار تقریب حاصل یک عدد دهمی میشود که دوره ندارد و همچنین است عدد π که دوره ندارد و تا بیش از 700 پیکر بعد از ممیز حساب شده است.

تمرین

۱- معین کنید که ام یک ازین عدد گنگند و مقدار آنها را با تقریب $\frac{1}{1000}$ اخذانی

و نقصانی حساب کنید

$$\sqrt{2} \quad \sqrt{5} \quad \sqrt{79} \quad \sqrt{709}$$

$$\sqrt{7009} \quad \sqrt{25} \quad \sqrt{2.5} \quad \sqrt{75.32}$$

۲- هر یک از عدد های $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ را به یکدیگر نمی‌شود دید.

۱۵- ریشه اعداد جبری - ریشه m ام عدد جبری A را نیز مانند ریشه

m ام عدد حسابی A نمایش می‌دهند و چنانکه می‌دانیم

اول- هرگاه A مثبت و m جفت باشد برای ریشه m ام

A دو عدد قرینه می‌توان یافت

چنانکه ریشه دوم ۴ مساویست با $2 + 2$ یا با $2 - 2$ و ریشه چهارم ۵ است
با $\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{5}$ یا با $\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5}$.

دوم- هرگاه A منفی باشد و m جفت برای ریشه m ام A

هیچ عددی پیدا نمی‌شود زیرا توان جفت هر عدد (مثبت یا منفی) مثبت
میشود.

تبصره- ریشه های جفت عدد های منفی عدد های موهوم نامیده می‌شوند

مانند $\sqrt{-1}$ و $\sqrt{-4}$ و $\sqrt[4]{-7}$. بطور کلی هر عبارتی که در آن عدد
موهومی باشد موهوم خواهد بود

سوم- هرگاه m تاق باشد برای ریشه m ام عدد A همیشه یک عدد

یافت می‌شود نه بیش. در حالتیکه A مثبت باشد این ریشه مثبت است
و در حالتی که A منفی باشد ریشه تا ق آن هم منفی خواهد بود

مثلاً ریشه سوم ۲۷ عدد ۳ است: $\sqrt[3]{27} = 3$ و همچنین $\sqrt[3]{-32} = -2$
یادآوری - نشانه جلوی ریشگی (رادیکال) - ریشه دوم ۴ مساویست با

± 2 یا $\pm \sqrt{4}$ ولی هرگاه بنویسیم $\sqrt{4}$ مقصود تنها مقدار $\sqrt{4}$ یعنی 2 است
همچنین $+2 = \sqrt{-32}$ و همچنین است هرگاه در زیر ریشگی (رادیکال) عبارت

جبری نوشته شود مثلاً هرگاه بنویسیم $\sqrt{x^2+1}$ مقصود ریشه دوم x^2+1 است
با نشانه +

پریش های شغابی

۱- مقدار عددی هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید:

$\sqrt{9}$	$-\sqrt{4}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt[3]{8}$
$\sqrt[3]{-27}$	$-\sqrt[4]{625}$	$-\sqrt[4]{16}$	$\sqrt{-8}$
$\sqrt[5]{32}$		$-\sqrt[5]{-32}$	$\sqrt[5]{243}$
$-\sqrt[7]{-128}$	$-\sqrt[4]{64}$		$-\sqrt[3]{-125}$

۲- ریشه دوم ۱۶ و ۱۶- و ۶۲۵ و ریشه سوم ۲۷ و ۲۷-
در ریشه ششم ۶۴ را تعیین کنید.

۱۶- تقسیم بندی اعداد جبری - اعداد بدو طبقه تقسیم میشوند:
اعداد موهوم و اعداد غیر موهوم یا حقیقی اعداد موهوم مانند $\sqrt{2}$

$$5 + \sqrt{-1}$$

اعداد حقیقی مانند $\frac{2}{3}$ و $\sqrt{7}$ و 2.5
اعداد حقیقی نیز بنوبت خود بدو نوعند اعداد گویا و اعداد

گنگ

اعداد گویا مانند 5 و $\frac{3}{4}$ و 2.5 و غیره
اعداد گنگ مانند $\sqrt{2}$ و π و $\sqrt{3}$ و 5 و غیره
اعداد گویا نیز بدو نوعند: اعداد گویای درست مانند 25 و
 -7 و 52 و اعداد گویای برخه مانند $\frac{3}{7}$ و -2.76
از روی جدول تقسیم بندی اعداد جبری معلوم میشود:

اعداد جبری	}	حقیقی	}	گنگ	}	گویا	}	درست برخه	
									موهوم

پرسش های شفاهی

۱- عددی بنویسید که گویا و برخه باشد

۲- عدد منگی بنویسید

۳- عدد موهومی بنویسید

۴- عددی زیر را طبقه بندی کنید

$$\sqrt[2]{8} \quad \sqrt[3]{5} \quad \sqrt[2]{6.5} \quad \sqrt[5]{(-3)^5}$$

$$-\frac{2}{5} \quad \sqrt[5]{-32} \quad \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right) : \frac{2}{3}$$

۵- عبارت \sqrt{x} را با زار مقدارهای مختلف x طبقه بندی کنید

۱۷- عمل های راجع بر ریشه ها - قضیه - هرگاه شماره ریشه و نامی

مقدار زیر ریشگی را در عددی مانند m ضرب کنیم در ریشه تغییر

پیدا نمی شود یعنی
$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{A^m}$$

برای اثبات کافی است دو طرف تساوی بالا را بتوان m بار

(برای اینکه $\sqrt[m]{A}$ را بتوان m بار رسانیم می توانیم اول آنرا بتوان m

رسانده پس از آن حاصل یعنی A را بتوان m بار رسانیم)

مثلاً
$$\sqrt{4} = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$\sqrt{25} = \sqrt[15]{25^{15}}$$

تبصره - در بکار بردن قاعده بالا هرگاه m جفت باشد باید وقت

نمود که در نشانه اشتباهی رخ ندهد

مثلاً می‌دانیم که $\sqrt[3]{-۸} = -۲$ اگر شماره ریشه و نمای مقدار زیر ریشگی را در عدد ۲ ضرب کنیم بدون دقت در نشانه بتساوی غلط زیر می‌رسیم:

$$\sqrt[3]{-۸} = \sqrt[6]{(-۸)^2} = \sqrt[6]{۶۴} = +۲$$

این غلط از اینجا ناشی شده است که عدد ۸- را بتوان دوم رسانیم و در نتیجه نشانه $\sqrt[3]{-۸}$ از میان رفته است - برای رفع این غلط باید نشانه - را در جلوی دیکجا گذاشت بدین شکل:

$$\sqrt[3]{-۸} = -\sqrt[6]{۶۴} = -۲$$

تمرین

۱- تحقیق کنید آیا تساویهای زیر با زاویه مقدارهای a صحیح است یا نیست

$$\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$$

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{-a} = \sqrt[6]{a^2}$$

۲- این تساویها را تکمیل کنید:

$$\sqrt[3]{۸} = \sqrt[6]{?} \quad \sqrt[3]{-۸} = ? \sqrt[6]{?}$$

$$\sqrt{۲} = \sqrt[4]{?} = \sqrt[6]{۱۶} \quad \sqrt[3]{-۳۲} = ? \sqrt[6]{?}$$

۱۸- نتیجه ۱- تحویل جذر ریشگی بیک شماره - برای تبدیل جذر ریشگی بیک شماره آنی که دارای یک شماره اند بهتر است که کوچکترین مضرب

شماره های ریشه ما را شماره مشترک قرار دهیم و برای تعیین نمای
مقدار زیر ریشگی کافیت که شماره مشترک را بر شماره ریشه هر ریشگی
تقسیم نموده بهر ادر نمای مقدار زیر آن ریشگی ضرب کنیم
مثلا برای تبدیل $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ بر یکسانیا
یک شماره اند کو چکترین مضرب شماره های ریشه ارا که عدد ۱۲ است شماره
مشترک قرار میدهم و چون بهر تقسیم عدد ۱۲ بر شماره ریشه اول و بر شماره
ریشه دوم ۴ و بر شماره ریشه سوم ۳ است بنا بر این ریشگی های بالا بترتیب
برابرند با $\sqrt[4]{12}$ و $\sqrt[3]{12}$ و $\sqrt[3]{12}$

تمرین

ریشگی های هر سطر ادرای یک شماره نمایند

$$\sqrt{2} \text{ و } \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[4]{x^3} \text{ و } \sqrt{x}$$

$$\sqrt[3]{-2} \text{ و } \sqrt{7} \text{ و } \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{x} \text{ و } \sqrt{y} \text{ و } \sqrt[3]{y}$$

$$\sqrt[4]{m^2} \text{ و } \sqrt[3]{3m^5}$$

$$\sqrt{a-x} \text{ و } \sqrt[3]{x+a}$$

۱۹- نتیجه ۲- چون شماره ریشه و نمای مقدار زیر ریشگی را برابر

عددی مانند هر تقسیم کنیم در ریشه تغییری پیدائی نشود

$$\text{مثلاً} \quad \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{5^6} \quad \text{و} \quad \sqrt[4]{5^4} = \sqrt[4]{5^8}$$

تبصره- هرگاه نمای مقدار زیر ریشگی جفت باشد و بخوابیم آنرا بر عدد جفت

هر تقسیم کنیم باید متوجه بود که در خیال بموارد مقدار زیر ریشگی مثبت میشود بنابراین باید

مراعات نشانه را نمود مثلاً $\sqrt[4]{a^6}$ بازاء بمقدار نمای ۴ (چهار مثبت و چهار منفی)

بمورد مثبت است - حال اگر ۱۰ و ۶ را بخوابیم بر ۲ تقسیم کنیم باید نشانه ۴

$$\sqrt[4]{a^6} = \sqrt[2]{a^3} \quad \text{را در نظر گرفت چنانکه اگر ۴ مثبت باشد چنین میشود}$$

$$\sqrt[4]{a^6} = -\sqrt[2]{a^3} \quad \text{و اگر ۴ منفی باشد باید نوشت}$$

این شیجه برای ساده کردن ریشگیها بکار میرود

تمرین

ریشگی های زیر را با در نظر گرفتن نشانه ساده کنید:

$$\sqrt[6]{(-2)^6}$$

$$\sqrt[12]{x^7}$$

$$\sqrt[4]{x^6 y^6}$$

$$\sqrt[4]{x^2}$$

$$\sqrt{x^4}$$

$$\sqrt[3]{a^3}$$

$$\sqrt[9]{27}$$

$$\sqrt[5]{32}$$

$$\sqrt[6]{16}$$

۲۰- ضرب ریشه ها - حاصل ضرب چند ریشگی که دارای شماره

مشترک m باشد مساوی ریشه m ام حاصل ضرب مقدارهای
زیر ریشگی ها است

$$\sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[m]{B} \cdot \sqrt[m]{C} = \sqrt[m]{A \cdot B \cdot C}$$

یعنی

دبرای اثبات کافی است دو طرف تساوی بالا را بتوان m برسانیم اگر
شماره ریشگیها مساوی نباشد اول آنها را تحویل بیک شماره نموده پس از آن
مانند بالا عمل مینماییم

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 4^2} = \sqrt[6]{128}$$

مثلاً

تمرین

حاصل هر یک از عبارت های زیر را بدست آورید:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{15}$$

$$\sqrt{3} (2\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

مطابق ضرب یکجدا ای در چند جمله عمل میکنیم ازینقرار:

$$\sqrt{3} (2\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{6} - 3 = 2(\sqrt{6} - 1)$$

$$(\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{\frac{56}{1}}) \sqrt{\frac{5}{1}}$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3})$$

مطابق قاعده ضرب چند جمله در چند جمله عمل میکنیم از غیر قرار:

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) =$$

$$= 4 + 5\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 15 = 3\sqrt{6} - 11$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})$$

$$(4\sqrt{7} - 3\sqrt{10})(3\sqrt{7} + 2\sqrt{10})$$

$$(2\sqrt{a} - \sqrt{3a})^2$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{x+2})^2$$

$$(\sqrt{a-2} + \sqrt{3+a})^2$$

$$\sqrt{2}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})$$

$$\sqrt[3]{3}(\sqrt{2} - \sqrt{5})$$

$$\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^3})$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{xy^2})$$

۲۱- نتیجه ۱- همواره میتوانیم سازه‌ای را درون ریشگی بنامیم بشرط اینکه آن سازه را بتوان نامی ریشه رسانیده و عبارت زیر ریشگی ضرب بنامیم.

$$2 = \sqrt{4} = \sqrt[5]{2^5} = \sqrt[5]{32}$$

مثلاً

$$a \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$$

تمرین

۱- سازه خارج ریشگی را درون ریشگی کنید

$$5 \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$2 \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$4 \sqrt{3}$$

$$x \sqrt{x}$$

$$x \sqrt{\frac{1}{x^2}}$$

$$c^x \sqrt{c^x - c^x}$$

$$(3x+1) \sqrt{\frac{5}{9x^2-1}}$$

$$(a-b) \sqrt{\frac{a+b}{a^2-b^2}}$$

۲- این عبارت را ساده کنید

$$(x-y) \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{9x^2-9y^2}$$

$$+ (x+y) \sqrt{\frac{25xy^2-25x^2y}{x+y}}$$

۲۲- نتیجه ۲- بعکس میتوان سازه ای را از زیر ریشگی بیرون آورد و قسّمه نامی آن سازه بر شماره ریشه بخش پذیر باشد و بصورت میتوان آن سازه را با بنامیکه مساوی به تقسیم نامی اول آن بر شماره ریشه است در بیرون ریشگی بصورت ضرب نوشت

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

مثلاً

$$\sqrt[4]{a^8 b^{12} c^5} = \sqrt[4]{a^8 \cdot b^{12} \cdot c^4 \cdot c} = a^2 b^3 c \sqrt[4]{c}$$

این عمل هم برای ساده کردن ریشگی با جکار می‌رود .

تمرین

عبارت‌های زیر را ساده کنید:

$$\sqrt{9x^3}$$

$$\sqrt[3]{54a^8}$$

$$\sqrt{11-9\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{20} - \sqrt{45}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{27}$$

$$\sqrt{45} - \sqrt{10} + 2\sqrt{180}$$

$$2a\sqrt{a^4} - 3a\sqrt{a^3} + 9\sqrt{a^3}$$

$$3\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2000} - \sqrt[3]{250}$$

$$2\sqrt[3]{375} + \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{648}$$

$$\sqrt{(x-y)^2} + m\sqrt{x^2-2xy+y^2} + (x+y)\sqrt{x-y}$$

۲۳- توان ریشه ها - برای این که یک ریشه را بیست توان برسانیم کافیست مقدار زیر ریشگی را با آن توان برسانیم (زیرادریست توان حالت مخصوصی است از ضرب)

$$(\sqrt[m]{A})^n = \sqrt[m]{A^n}$$

یعنی

تمرین

۱- هر یک از عبارت‌های زیر را بتوان سوم برسانید و حاصل را ساده کنید

$$\sqrt{5} \quad \sqrt[6]{27} \quad \sqrt[3]{x} \quad x\sqrt{x}$$

۲- هر یک از عبارتهای زیر را بتوان پنجم برسانید و حاصل را ساده کنید:

$$\sqrt[3]{-16} \quad \sqrt[7]{-3} \quad \sqrt[3]{x^2} \quad \sqrt{a}$$

۲۴- قضیه - برای اینکه از ریشه m ام عددی ریشه m ام استخراج شود کافی است که از عدد مفروض ریشه m ام استخراج گردد

$$\sqrt[m]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[m]{A}$$

یعنی

برای اثبات کافی است که دو طرف این تساوی را بتوان m ام برسانیم
(طرف چپ را اول بتوان هر دو پس از آن بتوان m ام برسانیم)

تمرین

هر یک از ریشه های مرکب زیر را بر ریشه ساده تبدیل کنید.

$$\sqrt{\sqrt{3}} \quad \sqrt{\sqrt{a}} \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}$$

$$\sqrt[6]{\sqrt[6]{27}} \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{y}} \quad \sqrt{\sqrt{x^3}}$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[2]{y}} \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{m^5}} \quad \sqrt[2]{\sqrt[2]{2}}$$

$$\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{5} \quad \sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} \quad \sqrt[5]{\sqrt[4]{x^2}}$$

۲۵- تقسیم ریشه ها - در تقسیم دو ریشه ای که شماره هر دو m است

بهر مساوی است با ریشه m ام بهر مقدار زیر ریشه بخشی بر مقدار زیر

ریشه‌های بخش یاب

$$\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}} = \sqrt[m]{\frac{A}{B}} \quad \text{یعنی:}$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{مثلاً}$$

و در حالتیکه شماره ریشه‌ها مختلف باشند اول آنها را تحویل بیک شماره نموده پس از آن ما تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{25}}{\sqrt[6]{8}} = \sqrt[6]{\frac{25}{8}} \quad \text{مثلاً}$$

تمرین

در بریک از تقسیم‌های زیر پس از ساده نمودن برآ حساب کنید

$$\sqrt{27} : \sqrt{3} \quad 3\sqrt{12} : \sqrt{2} \quad 5\sqrt{6} : \sqrt{3}$$

$$\sqrt{15} : \sqrt{30} \quad \sqrt{500} : \sqrt{600} \quad \sqrt{5} : \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{m^2x^2} : \sqrt[3]{m^2x^2} \quad \sqrt{xy} : \sqrt[3]{x^2y^2}$$

$$(\sqrt{12} - \sqrt{3}) : \sqrt{2} \quad (4\sqrt{5} + 10\sqrt{25}) : 3\sqrt{5}$$

$$(3\sqrt{20} - 4\sqrt{70}) : 3\sqrt{50} \quad (2\sqrt{21} + 3\sqrt{14}) : 6\sqrt{7}$$

$$(\sqrt{xy^2} - \sqrt{xy}) : \sqrt{xy}$$

۲۶- نمایی بر خه - عمل‌های راجع بریشه‌ها کمال شباهت را با اعمال راجع

برخه ندارد (مثلاً هرگاه شماره ریشه و نمای مقدار ریشگی را در یک مقدار ضرب
و یا بر یک مقدار تقسیم کنیم ریشه تغییر نمیکند همچنانکه هرگاه برخه نام و برخه شمار
در یک مقدار ضرب و یا بر یک مقدار تقسیم کنیم برخه تغییر نمیکند - همچنین است
تحویل چند ریشگی بیک شماره مانند تحویل چند برخه بیک برخه نام و غیره)
درین مقایسه نمای مقدار زیر ریشگی در حکم برخه شمار و شماره ریشگی در حکم برخه

نام میشود
ضمناً می بینیم که $\sqrt[4]{16}$ و یا $\sqrt[4]{2^4}$ را میتوانیم بصورت $2^{\frac{4}{4}}$ بنویسیم
(از تقسیم شماره ریشه و نمای زیر ریشگی بر عدد ۲)

$$\sqrt[4]{16} = 5^{\frac{12}{4}} = 5^3$$

همچنین

بنابر این قسّمکه نمای زیر ریشگی بر شماره ریشه بخش پذیر باشد میتوان ریشه را
بصورت توانی نوشت که نایش برخه باشد. برخه شمار این برخه شماره ریشه بود
و برخه نامش مساوی نمای مقدار زیر ریشگی است.

بطور کلی هرگاه هر بر ۹ بخش پذیر باشد نتیجه میشود :

$$(۱) \quad \sqrt[9]{A^{\frac{p}{q}}} = A^{\frac{\frac{p}{q}}{9}}$$

و اگر هر بر ۹ بخش پذیر نباشد $A^{\frac{p}{q}}$ دارای مغایرت با وجود این برای
عمومیت دادن دستور (۱)، قرار بر این شده است :

هر ریشه را بصورت توانی نویسنده که نایش بر خه ای باشد بابر خه
نامی مساوی شماره ریشه و بر خه شماری مساوی نمای مقد از زیر ریشه
مثلاً بنا بر این مته ار میتوان نوشت :

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{4}{3}} \quad , \quad \sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}}$$

و این مته ار با عمل های راجع بریشه ما و توانها منافاتی بهم ندارد بلکه

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x^2} = x \quad \text{مثلاً}$$

$$x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = x \quad \text{و همچنین}$$

یکی از فواید این تبدیل این است که عمل های راجع بریشه با عمل های
راجع بتوان تبدیل میشود و میتوان تمام خاصیت های که در ریشه گفته شده
بوسیده عمل های راجع بتوان اثبات نمود

مثلاً برای اثبات قضیه (شماره صفحه ۳۵) میتوان چنین نوشت :

$$\sqrt[m]{A^n} = A^{\frac{n}{m}} = A^{\frac{mq}{mq}} = \sqrt[mq]{A^{nq}}$$

و همچنین برای تبدیل جذر ریشه بکث شماره و غیره .

پرسش های شفا هی

ریشه های زیر را بصورت توانی با نمای بر خه بنویسید :

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{2} & x \sqrt[4]{25} & 5\sqrt{a^2} \\ 2\sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{a^2} & 10\sqrt[5]{x^2} \end{array}$$

۲- توانهای زیر را بصورت ریشه بنویسید:

$$\begin{array}{ccc} a^{\frac{1}{2}} & 2x^{\frac{1}{5}} & 3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \\ x^2 & a^3 & a^{\frac{5}{4}} \quad (3x^4)^{\frac{2}{3}} \\ 6^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} & a^{-\frac{1}{2}} & 3^{-\frac{2}{3}} \quad 2x^{-\frac{2}{3}} \end{array}$$

۳- مقدار هر یک از توانهای زیر را حساب کنید

$$\begin{array}{ccc} 4^{\frac{1}{2}} & 1^{\frac{1}{3}} & 4^{\frac{2}{3}} \quad 125^{\frac{2}{3}} \\ (-1)^{\frac{2}{3}} & (\frac{1}{4})^{\frac{2}{3}} & (-64)^{-\frac{2}{3}} \end{array}$$

تمرین

۱- توانهای زیر را با ده ترین صورت بریگی تبدیل کنید:

$$\begin{array}{ccc} 4(16x)^{\frac{1}{2}} & 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}} & 8a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{15}{3}} \\ 5^{\frac{2}{3}} \cdot am^{\frac{5}{3}} & a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} & (16y)^{\frac{2}{3}} \\ 6a^{\frac{15}{3}} \cdot b^{\frac{12}{5}} & m^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{4}} & \end{array}$$

۲- از روی تبدیل توان ریگی های زیر را با ده ترین صورت خود بنویسید:

$$(\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3})$$

$$\sqrt[3]{8}$$

$$\sqrt[4]{x^3 y^6}$$

$$\sqrt[3]{14}$$

$$\sqrt[3]{1250}$$

$$2\sqrt[5]{729}$$

$$\sqrt[4]{25}$$

$$\sqrt[6]{\frac{4967}{36}}$$

$$(\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3})$$

$$\sqrt[4]{27}$$

$$2\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[5]{5\sqrt{5}}}$$

$$\sqrt[n]{x^{\frac{m}{n}}}$$

۳- خاصیت های راجع بریشه دارا از روی تبدیل بتوان ثابت کنید.

۴- پهنه (مساحت) یک لوزی ۵۱۲ مترمربع است مطلوبست درازای قطرهایش در صورتیکه قطر کوتاه ۳ قطر بلند باشد.

۵- پهنه مربعی ۲۵ مترمربع است درازای قطرش را بدست آورید.

۶- نردبانی دارای ۱۱ پله است که فاصله آنها از یکدیگر ۲۵ متره فاصله پله آخر

از ابتدای نردبان ۲۳ متره فاصله پله اول از ابتدا ۱۸ متره است نردبان را بریز

قائمی تمیسه دادیم بقسمی که انتهای آن بر انتهای دیوار قرار گرفت و فاصله پایه آن از پای دیوار

عرا مترشد بلند دیوار چقدر است؟

۷- زمینی است شبکله گوشه منهای الا ضلع بار تفاع ۱۸۰ متر- ارزش این زمین

چند است در صورتیکه هر هکتار آن ۲۷۰۰ ریال بیزد؟

۸- نقطه A روی یکی از دو پهلوی زاویه θ داده شده است. پهلوی نقطه ای پیدا کنید بقسبی که از A و از پهلوی دیگر زاویه بیکت فاصله باشد.

۹- سه گوشه ای به پهلوی a و b و c داده شده حساب کنید قطعه ای را که برابر ارتفاع روی پهلوی a باشد.

۱۰- از یک سه گوشه قائم الزاویه پیرامون دیکت پهلوی گوشه قائم معلوم است پهنه آن را حساب کنید.

۱۱- دو دایره متقاطع شعاع های آنها d و d' و درازای خط دو مرکزشان d است درازای وتر مشترک آنها را حساب کنید.

۱۲- از سه گوشه متساوی الاضلاع درازای ارتفاع معلوم است پهنه اش را حساب کنید.

۲۷- گویا کردن برخه نام گشت - برای آسانی محاسبه بهتر است یکبر نام یک عبارت $\sqrt{2}$ باشد.

مثلاً برای محاسبه عبارت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ میتوانم اول مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ را با تقریب دلخواهی مثلاً تا $\frac{1}{1.4142}$ حساب کنیم

$$\sqrt{2} = 1.4142 \dots$$

پس از آن بهر یک را بر این عدد بدست آوریم:

$$\frac{1}{1,414200} = 0.7071000000$$

دیتوان نیز با ضرب کردن برخه نام و برخه شمار $\frac{1}{\sqrt{2}}$ در $\sqrt{2}$ برخه نام را گویانوه پس از آن عمل تقسیم را بجا آورد از مقدار:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1,414200}{2} = 0.707100$$

دومی بسینم راه دوم آسانتر از راه اول است.

برای گویا کردن یک برخه نام گنگ دو حالت در نظر میگیریم:

حالت اول - برخه نام بصورت $\sqrt[n]{A}$ است که در آن A

عبارتست گویا

مانند $\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ و $\frac{1}{\sqrt{a+x}}$ و درین قبیل برخه نام باید برخه نام و برخه شمار را در عبارت

ضرب کنیم که حاصل ضربش در برخه نام گویا گردد

مثلاً در $\frac{1}{\sqrt{3}}$ کافی است برخه نام و برخه شمار را در $\sqrt{3}$ ضرب کنیم و همچنین

در $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ برخه نام و برخه شمار را در $\sqrt{2}$ ضرب میکنیم از مقدار:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \times 2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

و نیز برخه $\frac{1}{\sqrt{a+x}}$ نوشته میشود:

$$\frac{1}{\sqrt{a+x}} = \frac{\sqrt{a+x}}{a+x}$$

تمرین

برخ نام عبارتهای زیر را گویا کنید:

$$\begin{array}{cccc} \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{30}} & \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} & \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{x}} \\ \frac{\sqrt{ab}}{a\sqrt{c}} & \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{3\sqrt{5ab^2}}{\sqrt{2ab^2}} & \\ \frac{\sqrt{mx}}{\sqrt{mx^3}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}} & \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} & \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{\frac{1}{9}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} & \end{array}$$

حالت دوم - برخ نام چند جمله گنک است

$$\frac{x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+c} \quad \text{و} \quad \frac{a}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

در اینجا نیز باید عبارتی یافت که حاصل ضربش در برخ نام گویا شود و برای این مقصود وقتی که شماره ریشه های برخ نام فقط ۲ باشد از اتحاد

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

استفاده میکنیم

مثلاً برای گویا نمودن برخ نام $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ کافی است برخ نام و برخ شمار را

در مزدوج $2+\sqrt{3}$ یعنی در $2-\sqrt{3}$ ضرب کنیم

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+\sqrt{3}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3} \\ \frac{a}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}} &= \frac{a(\sqrt{5}+2\sqrt{3})}{5-12} = -\frac{a(\sqrt{5}+2\sqrt{3})}{7} \end{aligned}$$

پس هرگاه برخه نام بصورت کلی $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ یا $A \pm \sqrt{B}$ باشد (A) گویا است و ممکن است چند جمله باشد (قاعده زیر را بکار میبریم):

۲۸- قاعده - برخه نام و برخه شمار را در مزدوج برخه نام ضرب میکنیم و هرگاه برخه نام بیش از دو جمله نگاشت داشته باشد همین قاعده را چند بار (باندازه لازم) تکرار می کنیم.

مثلاً برای گویا نمودن برخه نام $\frac{x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+c}$ اول $\sqrt{a}+c$ را در کسرم یکجمله گرفته از روی قاعده بالا عمل می کنیم

$$\frac{x}{\sqrt{a}+c-\sqrt{b}} = \frac{x[(\sqrt{a}+c)+\sqrt{b}]}{(\sqrt{a}+c)^2 - b}$$

$$= \frac{x(\sqrt{a}+c+\sqrt{b})}{a+c^2-b+2c\sqrt{a}}$$

حالا می بینیم که برخه نام بصورت $A \pm \sqrt{B}$ است که در آن

$$A = a + c^2 - b \quad \text{و} \quad \sqrt{B} = 2c\sqrt{a}$$

و برخه شمار برخه آخر را در مزدوج عبارت $(a+c^2-b)+2c\sqrt{a}$ و یا

در $(a+c^2-b)-2c\sqrt{a}$ ضرب کنیم برخه نام گویا میشود

$$\frac{x}{\sqrt{a}+c-\sqrt{b}} = \frac{x(\sqrt{a}+c+\sqrt{b})(a+c^2-b-2c\sqrt{a})}{(a+c^2-b)^2 - 4ac^2}$$

لمرین

برخه نام عبارتتهای زیر را گویا نمائید:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3} & , & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{1}} \\
 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} & , & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} , \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \\
 \frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{5\sqrt{2}-6\sqrt{7}} & , & \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6\sqrt{2}-6} \\
 \frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1} & , & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} \\
 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} & , & \frac{\sqrt{a+b}}{2-\sqrt{a+b}} \\
 \frac{9}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{3}-\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{9-3} \\
 & & = \frac{3\sqrt{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})^2}}{6} = \frac{3\sqrt{6(3+\sqrt{2})}}{2}
 \end{array}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} ; \frac{10}{\sqrt{5}-\sqrt{5}} ; \frac{12}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}$$

۲۹- بهچندی گنگ - گوئیم بهچندی گنگ است وقتی که دارای عبارت گنگی شامل مجهول باشد

$$\sqrt{x-1} = x^2 + 5x - 6 \quad \text{مانند}$$

$$\sqrt{x} - 2 = \sqrt{2x-1} \quad ,$$

ولی بهچندی $\sqrt{x^2} = 5$ گنگ نیست زیرا $\sqrt{x^2}$ گویا است و مساوی $|x|+1$ است.

۳۰- قاعده حل بهچندی گنگ - برای حل بهچندی گنگ باید اول

آن بهچندیرا تبدیل به بهچندی گویا کنیم یعنی عبارت گنگ را از بین ببریم پس از آن بهچندی

حاصل را از روی قاعده مانیکه داریم حل کنیم.

برای این کار ابتدا جمله های مشابه دو طرف بمعنی را جمع می کنیم پس از آن برای از بین بردن عبارت گنگ (دقتیکه عبارت های گنگ بمعنی دارای یک شماره ریشه باشند) دو طرف بمعنی را بتوان شماره ریشه می رسانیم گاه برای از بین بردن عبارت های گنگ یک بمعنی لازم می شود که دو طرف را چند بار (با اندازه لازم) بتوان برسانیم.

۳۱- تبصره - چون دو طرف بمعنی بتوان جفت رسد بمعنی حاصل عموماً بمعنی اصلی هم ارز نیست (*) یعنی ممکن است جواب های خارجی داشته باشند که با جواب های بمعنی حاصل را در بمعنی داده شده امتحان نمود

مثال ۱- بمعنی $\sqrt{x-7} - 2 = 0$ را حل کنید جمله گنگ را تنها گذارده دو طرف

مععنی را بتوان دوم می رسانیم خواهیم داشت

(*) زیرا اگر فرض کنیم بمعنی اصلی $A = B$ باشد بمعنی جدید بصورت $A^2 = B^2$

خواهد بود و این بمعنی جدید علاوه بر ریشه های بمعنی اصلی ریشه های بمعنی $A = -B$ را

هم دربر خواهد داشت زیرا چون بمعنی $A = -B$ را بتوان دوم می رسانیم نیز $A^2 = B^2$ می یابیم

مثال - در بمعنی $x = 5$ که ریشه آن ۵ است اگر دو طرف را بتوان دوم می رسانیم بمعنی $x = 25$

به دست می آید که علاوه بر ریشه ۵ ریشه ۵- یعنی ریشه بمعنی $x = -5$ را هم دربردارد:

$$x - 7 = 4 \quad \text{و از آنجا} \quad x = 11$$

تحقیق - چون ۱۱ در پنجمی اصلی صدق میکند بنابراین جواب پنجمی گنگ است

مثال ۲- مطلوبست حل پنجمی $5 + \sqrt{4x^2 - 5} = 2x$ ریشی را تنها

گذارده و دو طرف را بتوان دو میرسانیم پس از ساده کردن خواهیم داشت

$$x = \frac{3}{4}$$

تحقیق - چون بجای x در پنجمی اصلی $\frac{3}{4}$ گذاریم توی غلط $5 + \frac{3}{4} = 3$

بدست میاید بنابراین پنجمی اصلی جواب ندارد و $\frac{3}{4}$ جواب خارجی است

مثال ۳- پنجمی گنگ زیر را حل کنید:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-4} = 1$$

بهترین است که ریشی دوم را بطرف دیگر پنجمی برده و دو طرف را بتوان دوم رسانیم در این صورت خواهیم داشت:

$$x + 5 = 1 + x - 4 + 2\sqrt{x-4}$$

دو طرف ریشی را در یک طرف تنها گذارده و دو طرف را باز بتوان دوم رسانیم پس از ساده

کردن حاصل میشود $x = 20$

تحقیق - جواب ۲۰ در پنجمی اصلی صدق نموده و بنابراین جواب است

تمرین

همچنین نکات زیر را حل کنید:

$$\sqrt{x} + 5 = 7$$

$$5 - \sqrt{x} = 1$$

$$\sqrt{2x} - 1 = 5$$

$$3 + 2\sqrt{x} = 5$$

$$\sqrt{2x-5} + 4 = 5$$

$$\sqrt{2x-6} + 6 = 10$$

$$\sqrt{2y-7} = \sqrt{4y+9}$$

$$4\sqrt{x} - 7 = 3\sqrt{x} - 1$$

$$\sqrt{x-11} - 3\sqrt{2x-5} = 0$$

$$5 - \sqrt{4x^2-5} = 2x$$

$$\sqrt{12+4\sqrt{x-1}} = 5$$

$$\sqrt{27-4\sqrt{5x+4}} = 4$$

$$\sqrt{x^2-4x+19} = \sqrt{x-2}$$

$$2\sqrt{x} - \sqrt{2x} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{5}{4} = \frac{6}{\sqrt{x}} + 2$$

$$\frac{9}{5+\sqrt{4}} = \frac{4}{1-\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{4x+2} = \frac{5x+6}{\sqrt{4x+2}}$$

$$\sqrt{6x+4} + \sqrt{x^2+10x^2+5x-1} = x+2$$

$$2\sqrt{4x-2} - \frac{10x}{\sqrt{4x-2}} = \frac{1}{\sqrt{4x-2}}$$

$$\sqrt{x+9} - \sqrt{x} = 1$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4} = 1$$

$$2\sqrt{y+5} + 3\sqrt{y-7} = \sqrt{25y+14}$$

$$3\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x-12} = 5\sqrt{x-9}$$

$$\sqrt{a-7} + \sqrt{a-2} - \sqrt{a-10} = \sqrt{a+5}$$

هـ - نسبت و تناسب

۳۲- نسبت و تناسب - بر مقدار جبری a بر a را نسبت پن a

a و a گویند و آنرا چنین نویسند $\frac{a}{a}$ یا $a:a$ (a و a را دو جز نسبت $\frac{a}{a}$ نامیم) و بعکس هر بر a را میتوان نسبت پن بر a و بر a نام نمایند

$$\text{نسبت های } \frac{3}{4} \text{ و } \frac{x+3}{x-5} \text{ و } \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{3}}$$

عل a ی راجع به نسبت a همان عملهای راجع به هر دو بر a است مثلاً اگر a و a جز نسبت را در عددی ضرب کنیم و یا بر عددی تقسیم کنیم نسبت تغییر نمیکند

۳۳- هرگاه a و a نسبت پن دو چندی بهجنس را معین کنیم یعنی آن را

با هم بسنجیم باید هر دو را با یک یک همان چندی بسنجید

مثلاً برای تعیین نسبت پن a کیلومتر و هفت متر چون هر دو را با متر بسنجیم نسبت

$$\text{پن آنها چنین میشود: } \frac{5000}{7} = \frac{5 \text{ کیلومتر}}{7 \text{ متر}}$$

ولی نمیتوان نسبت پن دو چندی ناچور را معین کرد یعنی دو چندی ناچور

با یکدیگر بسنجید و نمی شوند.

تمرین

۱- متین کنید نسبت پن یک فرسخ و هزار ذری را با یک کیلومتر (کذبح تقریباً

مصادی ۱۰۴ سانتیمتر است)

۲- معین کنید این دو نسبت که هم یک بزرگترند:

$$\frac{۲۴}{۳۱} \quad \text{و} \quad \frac{۱۶}{۲۳}$$

۳- ثابت کنید وقتی که a مثبت است این نامساوی برقرار است

$$\frac{a}{a+۲} < \frac{a+۴}{a+۷}$$

۴- معین کنید وقتی که a مثبت است که هم یک ازین دو نسبت بزرگترند:

$$\frac{۷+۴a}{۷+۵a} \quad \text{و} \quad \frac{۷+۲a}{۷+۳a}$$

۵- هرگاه هر دو عدد مثبت عدد مشبتي بغير ايم يا از آن دو عدد عدد مشبتي كم

كنيم چه تفاوتي در نسبت بين آن دو عدد پيدا ميشود ؟

۳۴- تناسب - هرگاه دو نسبت با هم مساوی باشند آن دو نسبت

را متناسب خوانند و تشکیل یک تساوی میدهند که آن را تناسب گویند

مثلاً میگوئیم چهار عدد a و b و c و d تشکیل یک تناسب میدهند وقتی که

نسبت بین دو عدد اول برتریب مساوی نسبت بین دو عدد آخر باشد و آن را

چنین نویسند

$$(۱) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a و b (اولی و آخری) را دو کمرانه (طرفین) و c و d (دومی و سومی)

را دو میان (وسطین) تناسب گویند و چهار مقدار a و b و c و d را

چهار جبره تناسب خوانند

$$\frac{۱۳}{-۱۲} = \frac{-۱۷ \frac{۱}{۴}}{۱۶} \quad \text{و} \quad \frac{۷}{۱۲} = \frac{۱۰.۵}{۱۸} \quad \text{مثلاً}$$

ممكن است يكى از چهار جبره تناسب يك باشد مانند

$$m = \frac{x}{y} \quad \text{و} \quad \frac{۴}{۲} = ۲$$

که بصورت تناسب چنین نوشته میشوند:

$$\frac{m}{1} = \frac{x}{y} \quad \text{و} \quad \frac{۴}{۲} = \frac{۲}{1}$$

بنابر این میتوان هر تساوى را بصورت تناسب در آورد مانند $x=۲$

که میتوان نوشت $\frac{x}{1} = \frac{۲}{1}$

۳۵- در هر تناسب حاصل ضرب دو کرانه مساویست با حاصل

ضرب دو میان.

یعنی از تناسب (۱) خواهیم داشت $ad = bc$

برای اثبات چون دو نسبت تناسب (۱) را بیک برض نام تبدیل کنیم نتیجه میشود

$$(۲) \quad ad = bc \quad \text{و از آنجا} \quad \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

نتیجه - پن چهار جبره تناسب a و b و c و d غیر از تناسب (۱) میتوان

یک عده تناسب های دیگری نوشت برای این کار کافی است تساوى (۲) را بجا

بریم

اول- چون دو طرف تساوی (۲) را بر dc تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$(۳) \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{و یا} \quad \frac{ad}{dc} = \frac{bc}{dc}$$

با مقایسه با تناسب (۱) می بینیم که در یک تناسب می توان جای دو میانه را با هم عوض نمود.

دوم- چون دو طرف تساوی (۲) را بر cb تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$(۴) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

یعنی: می توان در یک تناسب جای دو کرانه را با هم عوض نمود.

سوم- چون دو طرف تساوی (۲) را بر ac تقسیم کنیم نتیجه می شود

$$(۵) \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{و یا} \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

یعنی: می توان در نسبت یک تناسب را وارونه نمود.

یادآوری- چنانکه دیدیم هر تساوی را می توان بصورت تناسب نوشت

(بطوریکه در هر طرف فقط یک نسبت باشد)

مثلاً تساوی $\frac{۱۴}{۸} = ۱ + \frac{۳}{۴}$ را می توان بصورت این تناسب نوشت

$\frac{۱۴}{۸} = \frac{۱ + \frac{۳}{۴}}{۱}$ که اگر دو طرف تساوی آنرا وارونه کنیم خواهیم داشت

$\frac{۱}{۱۴} = \frac{۱}{۱ + \frac{۳}{۴}}$ و یا $\frac{۴}{۷} = \frac{۱}{۱۴}$ ولی هرگز نباید برای وارونه کردن

دو طرف تساوی $\frac{۱۴}{۸} = ۱ + \frac{۳}{۴}$ چنین نوشت $\frac{۱}{۱۴} = \frac{۴}{۷}$ یعنی

$\frac{7}{3} = \frac{8}{14}$ که غلط است.

پنجین در پنجمی $\frac{6}{2x-1} - 1 = \frac{6}{x}$ و طرف را بناید اینطور وارونه نمود:

$$\frac{x}{6} - 1 = \frac{2x-1}{6}$$

که غلط است و وارونه صحیح آن چنین است:

$$\frac{1}{\frac{6}{x} - 1} = \frac{2x-1}{6}$$

پنجمی اصلی دارای دو جواب ۲ و $\frac{3}{4}$ است در صورتیکه اگر از راه وارونه غلط پنجمی

$$\frac{x}{6} - 1 = \frac{2x-1}{6}$$

را حل کنیم فقط یک جواب $x = -\frac{5}{4}$ می‌رسیم که آنهم درست نیست.

چهارم - ترکیب نسبت - اگر برد و طرف تناسب (۱) عدد یک بنویسیم

$$1 + \frac{a}{b} = 1 + \frac{c}{d}$$

خواهیم داشت

$$(۶) \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

درین صورت گویند برای بدست آوردن تناسب (۶) در تناسب (۱) ترکیب نسبت شده است.

پنجم - تفصیل نسبت - اگر از دو طرف تناسب (۱) عدد یک را کم کنیم

$$(۷) \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

حاصل میشود

درین صورت گویند در تناسب (۱) تفصیل نسبت شده است

ششم - از تقسیم دو طرف (۶) و (۷) بر یکدیگر این تناسب بدست

$$(۸) \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad \text{میآید}$$

که از ترکیب و تفضیل تناسب (۱) بدست آمده.

هفتم - از دارونه نمودن هر یک از این تناسب ها و یا از عوض نمودن جای دو کرانه با هم و یا جای دو میان با هم تناسب های دیگری بدست میآید.

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{6} \quad \text{مثال ۱- این بهنجدی را حل کنید}$$

چون دو طرف این تناسب را دارونه کنیم خواهیم داشت $x = \frac{6}{5}$

مثال ۲- بهنجدی زیر را حل کنید

$$\frac{x-2}{2} = \frac{1}{3}$$

اگر این تناسب را ترکیب نسبت کنیم چنین میشود $\frac{x}{2} = \frac{4}{3}$ نخواهیم

$$x = \frac{4}{3}$$

$$\frac{x+5}{x-5} = \frac{1}{11} \quad \text{مثال ۳- این بهنجدی را حل کنید}$$

از ترکیب و تفضیل این نسبت خواهیم داشت $\frac{2x}{10} = \frac{12}{-10}$ نخواهیم

$$x = -6$$

مثال ۴- در بهنجده $\frac{x+a}{x-a} = \frac{b+c}{b-c}$ مجهول x را حساب کنید

$$\frac{2x}{2a} = \frac{c+1}{c-1} \quad \text{پس از ترکیب و تفضیل نسبت چنین میشود}$$

$$x = \frac{a(\frac{c}{d} + 1)}{\frac{c}{d} - 1} \quad \text{و از آنجا}$$

۳۶- چهارم جزء تناسب - در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ مقدار d را چهارم
چهارم جزء این تناسب گویند که سه جزء اول آن بر ترتیب a و b و c
میباشد

هر کدام از جزء های دیگر را می توان چهارم جزء پنم سه جزء دیگر گرفت
و ترتیب سه جزء دیگر از روی تناسب (۱) بدست می آید

مثلاً c چهارم جزء تناسب پنم b و a و d است زیرا کافی است تناسب

$$(۱) \text{ را وارونه کنیم: } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\text{و همچنین } \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \text{ است چهارم جزء این تناسب است}$$

$$\text{و نیز } \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \text{ است.}$$

مثال - حساب کنید چهارم جزء تناسب پنم ۲ و ۳ و ۸ و ۱ را

چون این چهارم جزء را به x بنامیم خواهیم داشت $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$ که
مقدار آن مساوی ۱۲ است.

۳۷- میانه هندسی (واسطه هندسی) - هرگاه در یک تناسب دو

میان (یاد و کرانه) با هم مساوی باشند هر کدام از دو میان (یاد و کرانه)
را واسطه هندسی پنم دو کرانه (یاد و میان) گویند

مثلاً در تناسب $\frac{۴}{۲} = \frac{۸}{۴}$ عدد ۴ میانه هندسی است بین ۲ و ۸
و بطور کلی در تناسب $\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$ عدد m میانه هندسی است بین دو مقدار a و b

و بعکس میانه هندسی بین دو عدد a و b عددی است مانند m
بقسمی که $\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$ باشد و یا بنا بر شمار (۳۵) $m^2 = ab$ و از اینجا
 $m = \pm \sqrt{ab}$

یعنی m یا میانه هندسی بین دو عدد a و b از حیث قدر مطلق
نسای ریشت دوم حاصل ضرب آن دو عدد است و دارای دو
جواب قرینه میباشد.

چنانکه میانه هندسی بین ۴ و ۹ عدد $+۶$ یا -۶ است

تمرین

۱- از تناسب $\frac{c}{a} = \frac{c}{a}$ این تناسب را بدست آورید:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{c^2-d^2}{d^2}$$

$$\frac{a^2-b^2}{2ab} = \frac{c^2-d^2}{2cd}$$

$$\frac{a^2-b^2}{2ab} = \frac{c^2-d^2}{2cd}$$

۲- اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ باشد ثابت کنید که

$$\frac{\pm a \pm c \pm e}{\pm b \pm d \pm f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

چون مقدار مشترک $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}$ را به q بنامیم نتیجه میشود

$$a = bq \quad c = dq \quad e = fq$$

از جمع جبری این تویات و دیات و ی زیر بدست میآید:

$$\pm a \pm c \pm e = q (\pm b \pm d \pm f)$$

چون طرفین این توی را بر ضریب q تقسیم کنیم حکم ثابت میشود

$$\frac{\pm a \pm c \pm e}{\pm b \pm d \pm f} = q = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \quad \text{یعنی}$$

۲- این پنجه‌ها را حل کنید:

$$(x+3):(x-5)=13:23$$

$$(2x+1):(4x-2)=4x:(2x-1)$$

$$(a+b):(a-b)=(c+x):(c-x)$$

$$\frac{a+c+e}{b+d+x} = \frac{a}{b}$$

۴- پن سه عدد ۱ و ۲۰ و ۳۲ چهارم جزر تناسب پیدا کنید

بخطور پن a ، ac ، ab و bc ،

، a^3 ، ab^2 و a^2b ،

۵- بین دو عدد ۱۶ و ۲۵ میانه هندسی پیدا کنید

بهینطور $12\sqrt{3}$ و $3\sqrt{3}$

۶- مبلغی را میخواستیم بین دو نفر به نسبت ۲ و ۳ بخش کنیم میدانیم سهم اولی ۴۰۰ ریال شده است معین کنید سهم دومی و مبلغ بخش کردنی را.

۷- با ۱۵۰ ریال ۱۷٫۵ متر پارچه خریدیم معلوم کنید قیمت ۲۵ متر از همین پارچه
(برسیده شکل تناسب)

۸- راست گوشه ای (مربع مستطیلی) به دارای a و پهنای b هم ارز مربعی است.
ثابت کنید که پهلوی این مربع میانه هندسی بین a و b است.

۹- پهلوی سه گوشه ای مساویت با ۱۵٫۷۵ متر و ۱۰٫۲۵ متر و ۸٫۴۵ متر
حساب کنید که تا یکدین از (منصف) هر گوشه روی پهلوی مقابل آن گوشه جدا میکند.
۱۰- میدانیم که نسبت بین پهنای دو چند پهلوی مشابه مساوی نسبت بین توانای دوم

دو پهلوی متناظر آنها است. اگر دو پهلوی متناظر آنها ترتیب مساوی ۱۵ سانتی متر و ۲۱ سانتی متر باشد و پهنه چند پهلوی دوم ۶۴۸ سانتی متر مربع باشد حساب کنید مساحت آنها
۱۱- میدانیم مساحت سطح کره یک شعاعش R باشد $4\pi R^2$ است و حجمش $\frac{4}{3}\pi R^3$

میباشد. اگر S_1 و S_2 مساحت سطح دو کره و V_1 و V_2 ترتیب حجم آنها و R_1 و R_2 شعاع آنها و d_1 و d_2 قطرهای آنها باشد و یبای زیر را ثابت کنید:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{d_1^3}{d_2^3}, \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1^3}{S_2^3}$$

۱۲- شعاع کره خورشید ۱۰۹ برابر شعاع کره زمین است متین کنید نسبت بین مساحت سطح آنها و نسبت بین حجم آنها را.

۱۳- در مثلثی اولاً ارتفاع وار در ضلع α مساوی ۱۸٫۳۲ متر است بچه فاصله از ضلع α خطی موازی این ضلع رسم شود تا مساحت مثلث حاصل $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث مفروض گردد؟

ثانیاً اگر ضلع β مساوی ۲۵٫۳۶ متر باشد حساب کنید که های آن را که بوسه این خط موازی جدا شده است.

تمرین فصل اول

۱- اگر $x + y + z = 0$ باشد ثابت کنید که

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

۲- عبارت $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$

را با حاصل ضرب سازه های اول تجزیه کنید.

۳- ثابت کنید که عبارت

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)$$

بازاء $a + b + c = 0$ متساوی ۱ است و بازاء $c = \pm(a - b)$ متساوی

۱ است.

۴- درستی تساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$$

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

بفرض $A \geq B$.

۵- تحقیق کنید آیا عدد $3 + \sqrt{3}$ جواب پنجذی $x^5 - 6x - 4 = 0$ است

بفرض

$$x^5 - 6x - 4 = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \frac{\sqrt{2}-2}{3} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x^5 - 2x - 3 = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \frac{1}{\sqrt[3]{1 \pm \sqrt{23}}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x^5 + 3x - 2 = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

۶- اگر a و b و c اندازه درازای پهلوی سه گوشه ای باشند و S

پهنه (مساحت) آن و p نصف پیرامون (محیط) آن باشد از روی دستور

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

نخت و قسید هر سه پهلوی سه گوشه متساوی a است پهنه و ارتفاع آنرا حساب کنید

دوم دقتیکه $a = b$ است پهنه و همچنین ارتفاع دارد بر پهلوی c را حساب کنید.
 سوم ثابت کنید که بفرض $a^2 = b^2 + c^2$ پهنه سه گوشه مساوی c $\frac{1}{4}$ می شود.
 چهارم بازار $a = 4$ و $b = 1$ و $c = 10$ پهنه را $\frac{1}{10}$ تقریب حساب کنید.

۷- بوسیله تبدیل بتوان باغای برخه عبارت

$$\sqrt{a^2 \sqrt{a^2 b^2}} + \sqrt{b^2 \sqrt{a^2 b^2}}$$

را ساده کنید.

۸- این عبارت را حساب کنید

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3 + \sqrt{3}}}$$

۹- از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسبهای زیر را بدست آورید:

$$\frac{pa + qb}{pc + qd} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{cd}}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + d^2}} = \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bd}}$$

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{r}{z}$$

۱۰- اگر

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

باشد درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} = \frac{m^2 + n^2 + r^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

۱۱- عبارت $\sqrt{(a-b)(b-c)(c-a)}$ را ساده کنید و قشیکه

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{2} \quad \text{و یا} \quad a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

۱۲- حاصل عبارت زیر را بدست بیاورید :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

۱۳- a و b را طوری بگیرید که $x^4 + ax^3 + bx^2 + 12x + 4$ توان دوم

یک چند جمله باشد.

۱۴- ثابت کنید که چند جمله $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ توان دوم

یک چند جمله است.

۱۵- عبارتهای $x^3 - 2x^2 - 9x - 1$ و $x^3 - 2x^2 - 11x - 4$ را

حساب کنید وقتی که x را $2 + \sqrt{5}$ و یا $2 - \sqrt{5}$ بگیریم.

۱۶- آیات دی زیر درست است؟

$$\frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} + \frac{a-b}{1+ab} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}$$

۱۷- a و b را طوری بگیرید که $x^3 + ax^2 + bx - 6$ بر

$(x-1)(x-2)$ بخش پذیر باشد و بهر را بدست بیاورید.

۱۸- عبارت زیر را بجاصل ضرب چند سازه تبدیل کنید:

$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$$

۱۹- برخه زیر را ساده کنید :

$$\frac{a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)}{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)}$$

۲۰- ثابت کنید که $(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$

بخش پذیر است $x(x+1)(2x+1)$

۲۱- برش زیر را ساده کنید:

$$\frac{x-1}{2x-3} - \frac{x+2}{1 + \frac{2x}{2x-2 - \frac{1}{x+1}}}$$

۲۲- حساب کنید $\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x+1}}{1+x}}$ رادیکال

باشد $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

فصل دوم - نامچندبها و بحث نامچندبها حتمی فی

الف - نامساوی نامچندی

۳۸ - تعریف نامساوی تشکیل شده است از دو عبارت جبری که بوسیله یکی از این

دو نشانه \langle یا \rangle از هم جدا شده باشند

مانند $2-7 \langle 3+5$ و $0 \langle 7$ و $a+2 \langle a-1$ و

$x-a \langle b+1$

وقتی نامساوی را نامساوی عددی گویند که دو عبارت آن از عدد های جبری تشکیل شده باشد مانند دو مثال اول

و چنانکه در کتاب اول گفته شده است نامساویها بطور کلی دارای خاصیت های زیر است

اول - میتوان بر دو طرف یک نامساوی مقداری مثبت و یا از هر دو طرف یک

مقدار کاست بدون اینکه جهت نامساوی تغییر کند یعنی طرفیکه بزرگتر بوده بزرگتر بماند

دوم - میتوان دو طرف نامساوی را در عدد مثبت ضرب نمود و یا بر یک عدد مثبت

تقسیم نمود بدون اینکه جهت نامساوی تغییر کند

سیوم - چون دو طرف نامساوی در عدد منفی ضرب شود (و یا بر عدد منفی تقسیم شود)

جهت نامساوی تغییر میکند

چهارم - بفرض اینکه هیچکدام از دو طرف نامساوی صفر نباشد هرگاه دو طرف نامساوی را
و ا ر و نه کنیم جهت نامساوی تغییر میکند جز وقتی که نشانه دو طرف مختلف باشد.

مثال $5 < 7$ اگر دو طرف را ا ر و نه کنیم میشود $\frac{1}{5} < \frac{1}{7}$
 $-7 < -5$
 $-7 < 5$
 $7 < -5$
 $\frac{1}{5} < -\frac{1}{7}$

۳۹ - تعریف - چند نامساوی را هم سو گویند وقتی که طرفهای راست همه
بزرگتر (یا کوچکتر) از طرفهای چپ آنها باشد

مثلاً نامساویهای $5 > 2$ و $-7 < -3$ و $2 > -1$ هم سو هستند
و این نامساوی $3 < \frac{1}{2}$ و $-5 < -\frac{2}{3}$ هم سو نیستند.

۴۰ - توان تاق یک نامساوی - چون دو طرف یک نامساوی را
بتوان تاق برسانیم این دو توان تشکیل یک نامساوی میدهند بهمان جهت نامساوی
مثال - دو طرف نامساوی $-2 < \frac{1}{4}$ را بتوان سه برسانیم این نامساوی

بدست میآید $-\frac{1}{4} < \frac{1}{16}$

۴۱ - توان جفت یک نامساوی - اولاً اگر دو طرف یک نامساوی
مثبت باشد و آنها را بتوان جفتی برسانیم این دو توان تشکیل یک نامساوی هم جهت با

آن نامساوی میدهد

مثلاً اگر دو طرف نامساوی $\frac{2}{5} > 3$ را بتوان دوم برسانیم این نامساوی مهم جفت

پیدا میشود $\frac{4}{45} > 9$

ثابتاً هرگاه دو طرف منفی باشند توان جفت آنها تشکیل یک نامساوی میدهد که هم

با نامساوی معنه وضو نیست

مثلاً توان دوم دو طرف نامساوی $-\frac{2}{7} < -\frac{1}{4}$ تشکیل این نامساوی را میدهد :

$\frac{4}{9} > \frac{1}{9}$

ثابتاً اگر دو طرف هم نشانه نباشند توان جفت آنها تشکیل یک نامساوی میدهد

که جهتش از روی قدر مطلق آنها معلوم میشود

مثلاً چون دو طرف نامساوی ۵- $3 > 5$ را بتوان دوم برسانیم حاصل میشود $9 < 25$

$4 > 9$ $3 > 2$

در حالت مخصوص که قدر مطلق دو طرف نامساوی باشد توان جفت آنها تشکیل

یک تساوی میدهد مثلاً ۳- $3 > 3$ را چون بتوان دوم برسانیم حاصل میشود

$9 = 9$

۴۲- نامساوی حرفی - چون بحرف x مقدارهای عددی مثلاً بگردد

از ۵ بدسیم درنصورت پن x : ۵ این نامساوی برقرار میشود $5 > x$

و مضای آن این است که مقدار عددی x باید بزرگتر از ۵ باشد مثلاً میتوان
 $\frac{1}{5}$ یا ۱۰ و ۱۰۰۰ باشد و معلومست که اگر به x مقدارهای کوچکتر از ۵
 یا مساوی ۵ بدهیم نامساوی درست نیست.

پس در نامساوی $1 < 3 - 2x$ اگر به x مقدارهای کوچکتر از $\frac{1}{2}$ بدهیم
 نامساوی درست است و باز مقدارهای بزرگتر از $\frac{1}{2}$ یا مساوی نامساوی غلط
 میشود.

نامساویهای مانند و نامساوی بالا را نامیچندی گوئیم و مقدارهای عددی را که باید بجای
 x در مجهول نامیچندی بگذاریم تا نامساوی درستی بهم جهت با آن تشکیل شود
 جوابهای نامیچندی گوئید چنانکه جوابهای نامیچندی اول تمام عددی بزرگتر از ۵ باشد
 و در نامیچندی دوم تمام عددی کوچکتر از $\frac{1}{2}$ است.

این جوابها را بصورت زیر بنویسیم: در اولی $5 < x$ و در دومی $2 < x$

۴۳- نامیچندیهای هم ارز- و نامیچندی را هم ارز گوئید و تیکه هر دو دارای جوابها

مساوی باشند مانند $3 < x$ و $6 < 2x$

چون نامیچندی و حقیقت همان نامساوی عدیست بنا بر این برای تمام خواص نامساوی
 عدیست پس با رعایت آن خواص (مذمه ۲۸) میتوان از روی یک نامیچندی نامیچندیهای هم ارز را تشکیل داد:
 اول- هرگاه بر دو طرف یک نامیچندی مقداری بیفزاییم یا از دو طرف مقداری

کم کنیم نا بچندی هم ارز نا بچندی مفروض بدست میآید.
 نتیجه - میتوان جمله ای را از یک طرف نا بچندی بطرف دیگر برد بشرط اینکه نشانه
 آنرا تغییر داد.

مثال - در نا بچندی $4x + 2 > 3 - 5x$ چون ۳- را بطرف دوم
 ببریم یعنی برد و طرف ۳ بفرایم (نا بچندی هم ارزی بصورت $4x > 5x - 2$
 بدست میآید و نیز اگر $4x$ را بطرف اول ببریم این مساوی هم ارزی بدست
 میآید $5 > x$

دوم - چون دو طرف یک نا بچندی را در عدد مثبتی ضرب و بر آن تقسیم
 کنیم نا بچندی هم ارز و هم جهت با نا بچندی مفروض بدست میآید
 مثلاً چون دو طرف نا بچندی $3 - \frac{x}{4}$ را در عدد ۲ ضرب کنیم نا بچندی
 ۶- x بدست میآید که با آن نا بچندی هم ارز است همچنین در نا بچندی $3x < 7$
 چون دو طرف را بر ۳ تقسیم کنیم حاصل میشود $x < \frac{7}{3}$
 و اگر دو طرف نا بچندی را در عدد منفی ضرب و یا بر عدد منفی تقسیم کنیم میدانیم
 که جهت نا بچندی تغییر میکند و نا بچندی حاصل هم ارز با نا بچندی مفروض خواهد
 بود

مثلاً اگر دو طرف نا بچندی $\frac{1}{5} < -\frac{x}{5}$ را در عدد ۵- ضرب کنیم حاصل میشود

$$\frac{-5}{7} < x$$

و همچنین اگر در نا بهنجندی $12 - < x - 3$ دو طرف را بر ۳- تقسیم کنیم این بهنجی

$$\text{بدست میآید } 4 < x$$

۴-۴- نا بهنجندی یک مجهولی درجه اول - هرگاه جمله مجهول یک نا بهنجدی را
بیک طرف معلوم ها را بطرف دیگر ببریم و هر طرف را ساده کنیم اگر نا بهنجدی حاصل
شکلی از دو صورت $ax < b$ یا $ax > b$ درآید (که در آن a و b مقادیرهای عددی
معلوم هستند) آن نا بهنجدی را نا بهنجدی یک مجهولی درجه اول گویند.

حل نا بهنجدی یک مجهولی - حل نا بهنجدی یک مجهولی بدست آوردن عددی
است که چون بجای مجهول آن نا بهنجدی گذارده شود تشکیل نامساوی عددی درست

۴۴

حل نا بهنجدی $ax < b$. برای تعیین جوابهای این نا بهنجدی کافی است
که دو طرف را بر a (ضرب x) تقسیم نمائیم دو حالت اتفاق میافتد اگر a
مثبت باشد جواب نا بهنجدی چنین است $\frac{b}{a} < x$ و اگر a منفی باشد حاصل
میشود $\frac{b}{a} > x$

مثال ۱- نا بهنجدی $\frac{3}{4} + 2x < 5 - 4x$ را حل کنید:

اول مجهول را بیک طرف و معلومها را بطرف دیگر میبریم نتیجه میشود:

$$4x - 2x > 5 + \frac{3}{10}$$

و یا $2x > \frac{53}{10}$ و از آنجا $x > \frac{53}{20}$

مثال ۲- نامعجزی $\frac{2x-2}{2} - 1 > \frac{2x-1}{3} + 5$ را حل کنید

اول دو طرف را در ۶ (کوچکترین مضرب برخاناها) ضرب میکنیم حاصل میشود

$$4x - 2 + 30 > 9x - 6 - 6$$

و یا $4x - 9x > -12 - 28$

۴۰- $-5x > -40$ و از آنجا $x < 8$

تبصره ۱- حل نامعجزی $ax < b$ مانند حل نامعجزی $b < ax$ است
یعنی کافیت دو طرف آنرا بر a تقسیم کنیم.

تبصره ۲- برگاه پس از بردن جمله های مجهول بیک طرف مجموع آنها معضّر

(یعنی $a=0$) در این صورت نامعجزی تبدیل بیک مساوی عددی میشود که اگر آن

نامساوی درست باشد تمام عدد ها جواب نامعجزی است و در غیر این حالت نامعجزی
خلی است.

مثال- این نامعجزی را حل کنید

$$2mx - 7 < 3x + 5m$$

که در آن x مجهول و m نمایش مقدار معلومی است

$۳x$ را بطرف اول و ۷ را بطرف دوم برده ساده میکنم حاصل میشود:

$$(۱) \quad (۲m - ۳)x < ۵m + ۷$$

چون m بتواند مقدارهای مختلف بگیرد سه حالت اتفاق می افتد:

اول اگر $۰ < ۲m - ۳$ باشد یعنی $\frac{۳}{۲} < m$ جواب ناممکنی بالا چنین است

$$x < \frac{۷ + ۵m}{۲m - ۳}$$

دوم ممکن است $\frac{۳}{۲} < m$ باشد در این صورت از تقسیم دو طرف ناممکنی (۱) بر

$۲m - ۳$ جهت ناممکنی تغییر نمیکند بنابراین جواب ناممکنی چنین میشود:

$$x > \frac{۷ + ۵m}{۲m - ۳}$$

سوم ممکن است $m = \frac{۳}{۲}$ شود در این صورت ضریب x در ناممکنی (۱) صفر است

و دیده میشود که نامساوی درستی می آید بنابراین باز $m = \frac{۳}{۲}$ تمام

عدد m جواب ناممکنی بالا میباشد

تمرین

چند نامساوی بدخواه برگزیده خواص زیر را تحقیق کنید:

۱- در چند نامساوی مجموع طرفهای بزرگتر بزرگتر است از مجموع طرفهای کوچکتر.

۲- هرگاه جهت دو نامساوی مختلف باشد اگر طرف راست نامساوی دوم را از طرف

راست نامساوی اول و طرف چپ آنرا از طرف چپ نامساوی اول کم کنیم دو مانده

تشکیل یک نامساوی میدهد هم جهت با نامساوی اول.

۳- اگر دو نامساوی را در هم ضرب کنیم باین معنی که طرفهای راست را در هم و طرفهای چپ را در هم ضرب کنیم دو حاصل ضرب بدست میآید و چند حالت باید در نظر گرفت
اولاً اگر دو نامساوی هم جهت بوده و طرفهای آنها مثبت باشند دو حاصل ضرب تشکیل یک نامساوی هم جهت با آنها میدهد ثانیاً اگر دو نامساوی هم جهت بوده و طرفهای آنها
بهم منفرجه باشند دو حاصل ضرب تشکیل یک نامساوی میدهد که جهتش مخالف جهت آنهاست
۴- اگر $a > b$ و $c > d$ دارای یک نشانه باشند ثابت کنید که این نامساوی به همان جهت

$$(1+a)(1+b) > 1+a+b$$

۵- نامیچندی زیر را حل کنید:

$$2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{2} > 4 - 2x + \frac{x}{6}$$

$$\frac{x-2}{3} + \frac{2x-5}{6} < 2-x$$

$$\frac{3x}{4} - 1 - 2(x-2) > 5 - 2\left(3 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$(x-1)(x+2) < (x-2)(x+5)$$

$$(x+1)(x-2)(x-3) > x^2(x-6) - x(1-2x)$$

۶- نامیچندی ای حرفی زیر را حل کنید:

$$ax + c > bx + d$$

$$ax + c > bx + d$$

$$5ax + a - b < 2x - 3a(x - a) + b$$

$$\frac{ax+b}{a-b} - 1 < \frac{ax-b}{a+b} + 1$$

۷- مقدار ثانی برای x بدست آورید که جواب این دو نامساوی باشند :

$$\begin{cases} 3x + \frac{5}{11} < 2x + \frac{1}{3} - \frac{2x}{7} \\ 4x + \frac{3}{4} > 2x - \frac{x}{3} \end{cases}$$

و همچنین برای دو نامساوی

$$\frac{1}{3} - 2x < 2x - 5 < 3x + 1$$

$$\begin{cases} 8x - 5 + \frac{2x-1}{3} > \frac{5x}{2} - 3 \\ 2x - \frac{3x-2}{3} < \frac{5x}{2} - \frac{7}{6} \end{cases}$$

ب- بحث همچنین برای حری

۴۵- مثال ۱- برای حل همچنین حری $mx = 3$ باید دو طرف را

بر m تقسیم نمود بشرط اینکه m مخالف صفر باشد: $x = \frac{3}{m}$ جواب همچنین

که اگر m مقدارهای مختلف دهیم برای x نیز مقدارهای مختلف بدست

میآید مثلاً باز $m = 1$ مقدار x مساوی ۳ است و باز $m = \frac{1}{2}$

مقدار x مساوی ۶ است ولی اگر m مساوی صفر اختیار شود همچنین با

غلط است و جوابی برای x نمیتوان یافت زیرا حاصل ضرب هر عدد در صفر

ف علوم ۱۱۹

۳۳۸۲

صفر میشود مساوی ۳

بمصره - چنانکه سابقاً گفتیم (کتاب اول شماره ۵۳) اگر m از حیث قدر مطلق خیلی کوچک و نزدیک صفر اختیار شود قدر مطلق $\frac{1}{m}$ بسیار بزرگ میشود و آنرا با نشانه ∞ نمایش میدهند و گویند که قدر مطلق x بینهایت بزرگست.

مثال ۲- جواب بجهزی $mx = 0$ صفر است هر چه باشد مقدار m اما اگر m را بخصوص مساوی صفر بگیریم درینصورت هر عددی میتواند جواب بجهزی باشد یعنی در تساوی $0 \times x = 0$ میتوان بجای هر عددی قرار داد.

بمصره - اگر در این حالت که m صفر است مطابق قاعده کلی بجهزی $mx = 0$ را حل کنیم یعنی دو طرف را بر ضریب x تقسیم کنیم خواهیم داشت $x = 0$ و چون در بجهزی بالا هر جوابی صدق میکند بنابراین گوئیم مقدار 0 مبهم است یعنی ممکن است مساوی مقدارهای مختلف باشد.

۴۶- بحث بجهزی حری $ax = 0$ در مثال اول معلوم شد که بجهزی $mx = 2$ دارای جواب است مگر وقتیکه m مساوی صفر اختیار شود که در این حالت بجهزی نامشده است و در مثال دوم اگر m را صفر بگیریم بجهزی جوابهای بی شمار دارد و در غیر این حالت یک جواب معین دارد و ازینرو میتوان بحث بجهزی را بدین ترتیب تعریف کرد:

تعریف - بحث در «وجود» ریشه های بچندی حرفی عبارت
از اینکه مقدارهای مختلف حرف یا حروف معلوم را از نظر گذراندن
به پنجم بازار چه مقدارهایی از حرفهای معلوم بچندی دارای جواب
و بازار چه مقدارهایی از حرفهای معلوم بچندی نشدنی و یا جواب
مبهم است

راه علمی برای بحث بچندی های حرفی درجه اول اینست که اول بچندی
حرفی را بصورت کلی $ax = b$ درآورده و معلوم کنیم بازار چه مقدار
(یا مقدارهایی) از حرفهای معلوم کی از دو ضریب a و b و یا هر دو صفر
میشوند و خلاصه بحث چنین است:

اگر $a \neq 0$ باشد درنصورت بچندی $ax = b$ همیشه دارای جواب
معیّن $x = \frac{b}{a}$ است بخصوص اگر $b = 0$ باشد این جواب صفر است
اگر $a = 0$ باشد دو حالت اتفاق می افتد: اگر $b \neq 0$ باشد بچندی
ناشدنیست و جواب ندارد و اگر b هم صفر باشد جواب بچندی بی شمار و بصورت
مبهم \div است

و میتوان این جدول ساده زیر را تشکیل داد

بحث بچندی $ax = b$

اگر $\alpha \neq 0$ باشد بچندی دارای یک جواب معین $x = \frac{c}{\alpha}$ است
 اگر $\alpha = 0$ باشد $\left. \begin{array}{l} \text{اگر } c \neq 0 \text{ باشد بچندی ناشدنی است و جواب ندارد} \\ \text{اگر } c = 0 \text{ باشد جواب بچندی مبهم است} \end{array} \right\}$

مثال - مطلوبست بحث بچندی

$$(m^2 - 1)x = m(m - 1)$$

پس از تجزیه کردن ضریب x نتیجه میشود

$$(m - 1)(m + 1)x = m(m - 1)$$

درینجا ریشه های α (یعنی ضریب x) اینست $m = 1, m = -1$
 و ریشه های c $m = 0$; $m = 1$ میباشد بنابراین بحث این بچدی
 چنین میشود:

چون بازاء $m = \pm 1$ ضریب x صفر میشود بنابراین بعین این دو مقدار

هر مقداری به m داده شود بچندی دارای یک جواب معین $x = \frac{m}{m+1}$

است (پس از ساده کردن) بخصوص این جواب صفر است اگر $m = 0$ باشد

اگر $m = -1$ باشد تنها ضریب x صفر میشود و جهت معلوم مساوی ۲ میگردد

پس درازاء $m = -1$ بچدی ناشدنی است

و اگر $m = +1$ باشد هم ضریب x و هم طرف معلوم هر دو صفر میشوند

بنابراین باز $m=1$ جواب یکنحی مبهم است

خلاصه این بحث را می‌توان بطور ساده چنین نوشت

اگر $m \neq \pm 1$ اختیار شود یکنحی دارای ریشه یکتا $x = \frac{m}{m+1}$ است

یکنحی ناشدنیست $m = -1$

جواب یکنحی مبهم است $m = +1$

تمرین

مطلوبت حل و بحث یکنحیهای زیر :

$$a(x-c) = c \quad , \quad (a-1)x = b-a$$

$$ax - b = x - 1 \quad , \quad a(x-1) - 1 = x - a$$

$$(a-b)x - 1 = 1 - (b-1)x$$

$$(a+b)x + (a-b)x - ax = b-1$$

$$(a-x)(b-x) = x^2 \quad , \quad (x-a)(x-b) = x^2 - a^2$$

$$(ax-b)(m-1) + b(m-1) = a(m-1)$$

$$n(a+b-x) = n(a+b-x)$$

$$\frac{x-a}{a} + b = x-1$$

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = 1 \quad , \quad \frac{ax}{b} - \frac{b}{a}(x-b) = a$$

17-

$$\frac{a-bx}{b} = \frac{ax-b}{a} \quad \therefore a(m - \frac{x}{n}) = b(n - \frac{x}{m})$$

$$\frac{1x-a}{b} - \frac{b-1x}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab}$$

$$\frac{a}{b}(a-x) + a(b-x) + \frac{1-a}{a} + \frac{ab-x}{b} = \frac{a^2}{b}$$

$$\frac{a}{b}(1 - \frac{a}{x}) + \frac{b}{a}(1 - \frac{b}{x}) = 1$$

$$\left[(a^2-b^2)x-1 \right]^r + (1+abx-1)^r = \left[(a^2+b^2)x+1 \right]^r$$

$$\frac{b-x}{a+x} + \frac{1-x}{a-x} = \frac{a(1-x)}{a^2-x^2}$$

$$\frac{ax+b}{ax-b} - \frac{bx}{ax+b} = \frac{ax}{ax-b} - \frac{(ax-b)b}{ax^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{a(x-b^2)+b(a^2-x)}{a(x-b^2)-b(a^2-x)}$$

$$\frac{a+1}{b}x + \frac{b+1}{a}x + \frac{1ab}{a+b} = a+b+1$$

$$\frac{a(x-a)}{b+c} + \frac{b(x-b)}{a+c} + \frac{c(x-c)}{a+b} = x$$

$$\frac{x+a}{x-a} - \frac{x-b}{x+b} = f$$

$$1 - \frac{x+a}{x+b}$$

$$\frac{x-a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{a+b}{ab}$$

$$\frac{x+1ab}{a+b+c} + \frac{x-1ab}{a-b+c} = \frac{x+1ab}{a+b+c} + \frac{1ab-x}{b+c-a}$$

$$\frac{x-1a}{b+c-a} + \frac{x-1b}{a+c-b} + \frac{x-1c}{a+b-c} = \frac{1x}{a+b+c}$$

فصل سوم

الف - حل مسئله های یک مجهولی درجه اول

۴۸ - بر مسئله دارای معلوم یا معلوهایست که از روی آنها باید مجهول یا مجهولها بدست آورد.

مثلاً: دزد روزانه کارگری ۷ ریال است پس از ۱۵ روز مزد او چند ریال میشود؟ مسئله ایست که معلوهای آن مزد روزانه و مدت کار و مجهولش مزد این مدت است

بجین درین مسئله: دوزاویه مثلثی ۷۵ و ۴۵ است زاویه سوم را حساب کنید - معلوهای این مسئله دوزاویه مثلث و مجموع سه زاویه مثلث است این نکته در مسئله گفته نشده و ما خود میدانیم، و مجهول آن مقدار زاویه سوم است
۴۹ - حل کردن یک مسئله - حل کردن یک مسئله بدست آوردن مجهول با مجهولهای آن مسئله است از روی معلوهای

چنانکه میدانیم هرگاه بخوانیم یک مسئله را از راه حساب حل کنیم بری بدست آوردن مجهول علمائی بر روی معلوم ما انجام میدسیم تا در نتیجه این علمای مجهول بدست آید بدون اینکه خود مجهول (یا مجهولها) درین علمای داخل است

داده شود. ولی در جبر بعکس از اول مجهول را در علماء حالت میدهم برین ترتیب
که آنرا بحرانی نموده و مانند معلوم در نظر میکیریم و بر روی آن و معلوما علمائی را
که در مسئله گفته شده انجام میدسیم مانند مسئله های زیر:

مسئله ۱- $\frac{9}{11}$ پولی به پنهان داده شود ۱۸۲۰ ریال از آن پول مانده

تمام پول چقدر است؟

معلومهای این مسئله $\frac{9}{11}$ و ۱۸۲۰ است و مجهول آن تمام پول است
حل - تمام پول را که بنویسیم چند است x ریال میکیریم بنا بر این مبلغی که پنهان
تقسیم شده است $\frac{9}{11}x$ ریال بوده و آنچه مانده است $(x - \frac{9}{11}x)$ ریال
بماند بنا بر فرض مسئله میدانیم که این مانده ۱۸۲۰ ریال است پس خواهیم داشت:

$$x - \frac{9}{11}x = 1820$$

درین تساوی را به چندی مسئله نامند و از حل آن x و یا مبلغ پول بدست میآید

$$x = 2000 \text{ ریال}$$

مسئله ۲- در سه گوشه ABC پهلوی $BC = a = ۱۵$ متر و ارتفاع

AM دارد بر آن به درازای ۹ متر است بجهت فاصله از تارک در رأس A خطی
موازی پهلوی a رسم کنیم تا آنکه ای از آن که در دین سه گوشه است به درازای
۵ متر باشد.

معلومی مسئله ۱۵ و ۹ و ۵ و خاصیتی است که از خط موازی
یک پهلو در سه گوشه پیدا میشود

مجمول - فاصله این خط موازی از تارک A است .

حل - مجهول یعنی فاصله آن تکه خط از تارک A را که نمیدانیم به x متر می‌نامیم از رسم
این تکه خط موازی سه گوشه دیگری پیدا میشود شبیه سه گوشه اول که قاعده اش پنج
متر و ارتفاعش x متر است .

درین مسئله علاوه بر معلومی که داده شده است به این دو سه گوشه را نیز باید در نظر
گرفت که بدون رعایت آن مسئله حل نمیشود از روی همین شباهه خواهیم داشت

$$\frac{5}{15} = \frac{x}{9}$$

که بچند می‌سنده است و از حل آن x یا فاصله بدست می‌آید :

$$x = 3$$

پیش‌نمای شفاهی

۱- قیمت یک جلد کتاب ۵۰ ریال است بهای n جلد از همان کتاب چند ریال است .

۲- قیمت ۵ جلد کتاب ۵۰ ریال است بهای n جلد از همان کتاب چند ریال میشود .

۳- پهنای سه گوشه ای ۵۰ متر مربع است و درازای آن ۵ متر است پهنای پیرامون

آن چند متر است .

۴- دو ترن در یک آن از ایستگاهی به دوسوی مختلف حرکت کردند تندی آنها بترتیب ۴۵ کیلومتر و ۶۰ کیلومتر در ساعت است پس از سه ساعت به دشر A و B رسیدند فاصله آن دو شهر را از آن ایستگاه دانند که گیر.

۵- دو ترن a و b از دو ایستگاه A و B در یک آن بطرف هم می آیند تندی آنها بترتیب ۵۰ کیلومتر و ۴۰ کیلومتر در ساعت است پس از مدت سه ساعت هر دو به دورای می برسند فاصله دو ایستگاه A و B را حساب کنید در صورتیکه درازی دورای ۲۰۰ متر باشد

۶- اگر شخصی اکنون x سال داشته باشد $x-۱۵$ چه معنای میدهد؟

و همچنین معنای این بجهت چیست؟

$$x + 2 = 2(x - 15)$$

۷- شخصی در ۵ دقیقه ۵ متر راه میرود معلوم کنید مقدار برای راکه در یک ساعت خواهد رفت و همچنین دانست که لازم است برای عبور آن ۵ متر راه.

۸- پیاده و دو چرخه سواری در یک آن بروی راه راستی در یک جهت حرکت میکنند پس از مدت ۱۵ دقیقه دو چرخه سوار ۵ کیلومتر از پیاده جلوتر افتاده است اگر تندی پیاده در هر دقیقه ۱۰۰ متر باشد تندی دو چرخه سوار در هر دقیقه چند متر است؟
۹- در مسله پیش اگر تندی پیاده را ۵ کیلومتر در ساعت بگیریم تندی دو چرخه را

چقدر میشود؟

۱۰- دو چرخه سوار و پیاده ای از دو نقطه A و B با فاصله $AB = ۲۱$ کیلو متر در یک آن طرف هم حرکت می کنند پس از مدت ۳۵ دقیقه بهم میرسند میدانیم تندی دو چرخه سوار x کیلو متر در ساعت است تندی پیاده را حساب کنید.

۱۱- قاعده سه گوشه ای ۱۶ متر و بلندیش ۶ متر است اگر از قاعده ۴ متر کم شود چقدر باید بر بلندای افزوده شود تا پهنه تغییر نکند.

از حل مسئله های بالا قاعده کلی برای حل مسئله های فکری کین مجهول بدست می آید.

۵۰- قاعده - اول - باید صورت مسئله را با دقت زیادی خواند و تمام معلوم های مسئله را در نظر گرفت و از تمام معلوم های مسئله برای معین کردن مجهول باید استفاده نمود

دوم - مجهول مسئله را بحرانی مانند x نمایش داده مسئله را حل شده تصور کرد و از روی فرض مسئله رابطه ای بین معلوم ها و مجهول تشکیل داد که آن را به چندی مسئله گویند.

سوم - به چندی مسئله را باید حل کرد.

هرگاه به چندی مسئله ای از درجه اول باشد آن مسئله را نسبت به آن مجهول از درجه اول گویند.

تجربه ۱- گاه ممکن است بعضی مسئله دارای دو مجهول باشد و با وجود این بتوان از یکی از مجهولها و معادله های مسئله مجهول دیگر را حساب کرد یعنی حل این مسئله دو مجهول را بحل مسئله یک مجهول تبدیل نمود مانند مسئله ای زیر:

مسئله ۱- زمینی است است گوشه که درازای آن ۳۵ متر پیش از پهنای آن میباشد بست آورید درازا و پهنای آن را در صورتیکه پیرامون آن ۳۵۰ متر باشد چنانکه می پسیم این مسئله دارای دو مجهول است که درازا و پهنای زمین باشند ولی بنوانیم این مسئله را بتبدل بمسئله یک مجهول کنیم ازینقرار:

چون پهنای زمین را به دو مرتبه بنائیم درازای آن (مجهول دیگر) بموجب مسئله $(x + 35)$ متر خواهد بود و میدانی که پیرامون راست گوشه مساوی دو برابر مجموع پهناء و درازا است بنا بر این خواهیم داشت:

$$2 \{ x + (x + 35) \} = 350$$

و یا $2x = 140$ درازا آنجا $x = 70$ متر یعنی پهنای راست گوشه ۷۰ متر و درازای آن $70 + 35 = 105$ متر میشود.

ممکن است بجای اینکه پهناء را مجهول کنیم درازا را مجهول خستیار کنیم و از وی آن پهناء بدست آوریم.

تمرین - چون مسئله را حل کنید و قستیکه درازا مجهول خستیار کنیم.

مسئله ۲- فاصله A و B ۲۱ کیلومتر است دو چرخه سواری از نقطه A پیاده ای از نقطه B در یک آن حرکت می کنند اگر بطرف هم آیند پس از ۳۵ دقیقه و اگر برود و در جهت حرکت کنند بطوریکه دو چرخه سوار بدنبال پیاده باشد پس از ۶۳ دقیقه بهم میرسند معلوم کنید تندی هر یک را:

ملاحظه میشود که این مسئله دارای دو مجهولست (تندی پیاده و تندی دو چرخه سوار) و بتوانیم آن را بیک مجهول حل کنیم ازین قرار:

چون تندی دو چرخه سوار را در یک دقیقه x کیلومتر فرض کنیم راهیکه در ۳۵ دقیقه پیموده $35x$ کیلومتر خواهد بود بنا بر این راهیکه پیاده در نیت در $(x - 21)$ کیلومتر میباید پس تندی پیاده (مجهول دوم) $\frac{21 - 35x}{3}$ و یا $(x - \frac{3}{5})$ کیلومتر میشود

حال اگر هر یک ۶۳ دقیقه در جهت از A به سمت B راه روند دو چرخه سوار به پیاده میرسند یعنی راهیکه دو چرخه سوار در نیت می پیمایند ۲۱ کیلومتر بیش از راهی است که پیاده در نیت پیموده ولی راهی که دو چرخه سوار و پیاده در ۶۳ دقیقه پیموده اند بر تریب چنین است $x - 63$ کیلومتر و $(x - \frac{3}{5})$ ۶۳ کیلومتر بنا بر این این بجهت بدست میآید:

$$63x - 21 = 63(x - \frac{3}{5})$$

که از حل آن تنه‌ی دو چرخه سوار چنین می‌شود $\frac{7}{15} = x$ کیلومتر در دقیقه و یا ۲۸ کیلومتر در ساعت بنا بر این تنه‌ی پیاده $(\frac{7}{15} - \frac{3}{5}) = \frac{2}{15}$ کیلومتر در دقیقه و یا ۸ کیلومتر در ساعت می‌شود.

تمرین - در حل این مسئله تنه‌ی پیاده را به گیرید و مسئله را حل کنید
تبصره ۲ - در حل بعضی مسئله ما میتوان بجای مجهول مسئله مجهول دیگری را به
آورد و از روی آن مجهول مسئله را حساب کرد ممکن است این کار در بعضی مسئله بسیار
آسان شدن حل مسئله شود.

مثال ۱ - سوار افسانه برای اینکه در موقع معینی بمقصد برسد از مرکز بانه‌ی
ساعتی ۱۲ کیلومتر حرکت کرد چون ۱۲ کیلومتر را به پیاده نامور شد یک تن زندان را
برگزید پس از انجام ناموریت برای اینکه در همان موقع معین بمقصد برسد چاره
شد ساعتی ۴ کیلومتر بر تنه‌ی خود بمیزاید معلوم کنید فاصله مقصدش را از مرکز
چون فاصله مطلوب را به x بنامیم در دفعه اول سوار این فاصله را در مدت
 $\frac{x}{12}$ ساعت و در دفعه دوم در مدت $\frac{x}{4}$ ساعت می‌پیاید اما تفاوت این دو
مدت مساوی مدتی است که سوار ۱۲ کیلومتر فرستاده بعد همان راه را برگشته
بنی مساوی $\frac{12}{4} = ۳$ ساعت است پس همچنی مسئله چنین است

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{4} = ۳$$

که از محل آن x یعنی فاصله مرکز از مقصد شش که ۹۶ کیلومتر است معلوم میشود
 ممکن است مدتی را که سوار برای رفتن از مرکز به مقصد لازم دارد x بگیریم پس از
 طرفی فاصله مرکز از مقصد x ۱۲ کیلومتر و از طرف دیگر $۱۶(x-۲)$ کیلومتر است
 (زیرا مدت دوم $\frac{۲۴}{۱۲} = ۲$ ساعت از مدت اول کمتر است) پس این معذی

$$۱۲x = ۱۶(x-۲)$$

که از محل آن مدت و در نتیجه فاصله مرکز از مقصد بدست میآید

$$x = ۸ \text{ ساعت و فاصله } ۱۲x = ۱۲ \times ۸ = ۹۶ \text{ کیلومتر}$$

ازین روشی پسینم که راه دوم کمی آسانتر از راه اول است.

مثال ۲- مسئله ۲ از تبصره ۱- در این مسئله تندی دو چرخه سوار و تندی پایا
 مجهول بود- میتوانیم بجای اینکه مستقیماً این دو مجهول را حساب کنیم را بهایه که پیاده
 و دو چرخه سوار در ۶۳ دقیقه پیاده اند مجهول گرفته آنها را بدست آوریم و از روی
 آنها تندی مجهول را حساب کنیم

فرض میکنیم راهی که پیاده در مدت ۶۳ دقیقه پیاده x کیلومتر باشد پس
 راهی که دو چرخه سوار در این مدت رفته $(۲۱+x)$ کیلومتر میشود بنا بر این تندی
 هر یک بر تریب چنین است $\frac{x}{۶۳}$ کیلومتر در دقیقه و $\frac{۲۱+x}{۶۳}$ کیلومتر در دقیقه

پس راهی که در ۳۵ دقیقه پیاده اند بر تریب چنین میشود:

$$\frac{5x}{9} + \frac{5}{9}(21+x) = \frac{25(21+x)}{63} \quad \text{کیلو متر} \quad \frac{5x}{9} = \frac{25x}{63}$$

و چون بنا بر فرض مجموع این دو راه ۲۱ کیلو متر است این معیشتی بدست میآید

$$\frac{5x}{9} + \frac{5}{9}(21+x) = 21$$

که از حل آن x بدست میآید $x = ۸٫۴$ کیلو متر

بنابر این تنیدی پیاده $\frac{2}{15} = \frac{۸٫۴}{۶۳}$ کیلو متر در دقیقه میشود.

و تنیدی دو چرخه سوار $\frac{7}{15} = \frac{21 + ۸٫۴}{۶۳}$ کیلو متر در دقیقه خواهد بود.

چون این دو راه حل را با هم بسنجیم هر چه از حیث عمل هر دو یکسان بنظر میآید ولی پی

که از راه دوم معیشتی مسئله آسانتر بدست میآید.

تمرین

مسئله های زیر را حل کنید:

۱- مجموع سه عدد متوالی ۲۱ است آن سه عدد که استند

۲- ۱۵۸ ریال را به سه نفر بخش کنید بطوریکه سهم دومی ۷۰ ریال بیش از سهم اولی

باشد و سهمی ۴ ریال بیشتر از دومی بگیرد

۳- ۱۲۹۰ ریال چند نفر را به بخت تری ۱۵۰ ریال چند نفر را ستونی تری

۸۰ ریال میستوان غریب بنا بر آنکه، بخت دومتر بیش از ستونی مورد لزوم باشد؟

۴- بخت تری ۱۵۰ ریالی، ستونی تری ۸۰ ریالی است با ۱۱۴۰

از هر یک چند متر بیستوان خرید بنا بر آنکه دو برابر مابوت فاستونی لازم باشد؟

۵- ۲۴۰ ریال را به سه نفر بخش کنید بطوریکه سهم اولی دو برابر دومی و سهم دومی سه برابر سومی باشد.

۶- شخصی خانه و باغی خرید بر روی مسم ۱۵۴۸۰۰ ریال معلوم کنید بهای هر یک را در صورتیکه بهای باغ ۵ برابر بهای خانه است

۷- دو چرخ سواری با تندی ساعتی ۱۲ کیلومتر حرکت نمود ۲ ساعت بعد دو چرخ سواری
یکدیگر با تندی ۲۰ کیلومتر به دنبال در رفت پس از چند ساعت با هم رسید؟

۸- پهنه مربعی ۲۵ متر مربع بیش از پهنه مربع دیگر است اگر به طولی مربع اول کمتر
ش از به طولی مربع دوم باشد پهنه هر کدام چقدر است؟

۹- مجموع دو عدد ۴۹۳ و تفاضلشان ۳۰ است تعیین کنید آن دو عدد را

۱۰- پدری ۳۰ سال بزرگتر از پسر است پس از ۴ سال سن پدر چهار برابر سن
پسر شود سن هر یک چقدر است؟

۱۱- شخصی ۱۷۰۰ ریال پارچه خرید بعد تمام را متری ۳٫۵ ریال فروخت و این
ساده مقداری زیان کرد حساب نمود که اگر تمام پارچه را متری ۵ ریال فروخته بود
چند درصدش تمام باشد از زیان سودیبر معلوم کنید در ازای پارچه را.

۱۲- ساعت فروشی ۱۸ ساعت نقره و ۱۳ ساعت طلا را بر روی هم به ۱۲۳۰۰ ریال

فردخته است در صورتیکه بهای هر ساعت طلا ۴ برابر بهای کجاست نقد باشد
بهای هر یک چقدر است ؟

۱۳- گنجایش دو ظرف پرازان آب بر روی هم ۱۹۲ لیتر است اگر ۶۰ لیتر از ظرف
اولی و ۱۲ لیتر از ظرف دومی برداشته شود مقداری آبی که در هر دو باقی میماند است
گنجایش هر یک چقدر است ؟

۱۴- پس انداز دو نفر ۷۲۰۰ ریال و ۱۵۰۰ ریال است هر یک سالیانه
۴۵۰ ریال پس انداز میکنند معلوم کنید پس از چند سال پس انداز دومی ۱۲۰۰
انداز اولی میشود ؟

۱۵- دارای دو نفر ترتیبی ۲۲۳۵۰ ریال و دیگری ۸۶۵۰ ریال
اولی سالیانه ۸۶۰ ریال از دارائی خود خرج میکند در صورتیکه دومی هر سال
۵۴۰ ریال انداخته بنای معلوم کنید پس از چند سال دارائی هر دو مساوی شود ؟
۱۶- زمینی است شکل راست گوشه که پهنایش $\frac{4}{3}$ درازایش باشد فونی
بر درازا ۱۰ متر و بر پهنای ۵ متر افزوده شود راست گوشه ای حاصل میشود که
پهنایش ۸۷۵ متر مربع بیش از پهنای راست گوشه اولی است تعیین کنید درازای
و پهنای راست گوشه را .

۱۷- پوری شغل خود گفت بر روی درختی ۵۰۰ ریال بنشینم

و هر روز یک غره بد داشته باشی باید ۲۰ ریال بدی پس از ۲۱ روز طفل ۱۰ ریال پول داشت معلوم کنی چند روز غره خوب داشته است؟

۱۸- فاصله دو شهر ۵۱۲ کیلومتر است ماشینی با تندی ۴۰ کیلومتر در ساعت دو ساعت بطراز شهر اول بطرف شهر دوم حرکت مینماید ماشین دیگر در موقع ظهر با تندی ساعتی ۲۲ کیلومتر از شهر دوم بشهر اول میرود معلوم کنید پس از چند ساعت از موقع حرکت بهم میرسند؟

۱۹- در ازای دو قاعده ذوزنقه ای ۵۶۵ و ۶۸۵ متر و ۱۲۸ و ۱۲۸ متر و بکندی آن ۳۲ متر است از یک تارک قاعده کوچکتر خط راستی چنان بکشید تا بقاعده بزرگتر برسد و ذوزنقه را بدو قسمت بهم ارز تقسیم کند.

۲۰- در موقع طرعه قریه های ساعتی (ساعت شمار دقیقه شمار) برهم منطبق پس از چند ساعت دیگر دوباره برهم منطبق میشوند (اولین انطباق)

راه حل: - تندی عقربه دقیقه شمار ۱۲ برابر تندی عقربه ساعت شمار است بنا بر این اگر x ساعت مدت و ضمناً قوسی از دایره ساعت باشد که عقربه ساعت شمار برای انطباق به پماید عقربه ثانیه شمار در نسبت قوسی برابر $x \times ۱۲$ می پماید واضح است که اختلاف این دو مسافت یکدوره محیط دایره ۱۲ است

۲۱- سه ساعت بعد از ظهر است پس از چند ساعت دیگر عقربه های بریک امتداد قرار

خواهند گرفت؟

۲۲- عددیست دوپیکری که مجموع پیکرهایش ۱۲ باشد چون آنرا بعکس ترتیب
نویسند عدد حاصل ۲۶ بکه از عدد مطلوب بزرگتر است.

راه‌سنائی - اگر α یکان و β دهه عدد دوپیکری باشد آن عدد چنین نوشته
شود $\alpha\beta\alpha$ و عکس ترتیب آن میشود $\alpha\beta\alpha$.

۲۳- مطلوبست تعیین عددی بین ۴۰۰ و ۵۰۰ بطوریکه مجموع پیکرهایش
۹ باشد و چون آنرا بعکس ترتیب نویسند عدد حاصل $\frac{۱۳}{۱۴}$ عدد مفروض شود.

۲۴- تاریخ اختراع چاپ عددی است چهارپیکری که پیکر دهگان نصف یکگان
وپیکر صد و مسادی مجموع پیکرهای دهگان و صدگان آن چون برآیند ۵۰۵ میباشد
عددی که حاصل میشود بعکس ترتیب عدد مطلوبست بدست آورید آن عدد را.

۲۵- مبلغ ۵۴۲۵ ریال را بین سه نفر بخش کنید قسمی که سهم اولی مسادی $\frac{۵}{۶}$
سهم دومی شود و سهم سومی مسادی $\frac{۱۷}{۱۳}$ سهم دومی گردد.

۲۶- حاصل جمیع دو عدد ۲۲ است و اگر بزرگتر را بر کوچکتر تقسیم کنند بهر
۳ مانده ۴ است آن دو عدد کدامند؟

۲۷- عدد ۵۱۲ را به دو جزه چنان تقسیم کنید که حاصل جمیع بهر یک بترتیب
۲۵ و ۳۰ برابر ۲۰ شود.

۲۸- چرخهای جلوی درشکه ای در پیوند رای ۱۵۰۰ دور پیش از چرخهای عقب
چرخیده اند. مطلوب است درازای رای را که درشکه پیوده بنا بر آنکه قطر چرخ جلو ۱۸
متر و قطر چرخ عقب یک متر باشد.

۲۹- در مثلثی بقا عدد $BC = ۲۵$ متر و بلند $AH = ۱۸$ متر مرتبی محاط کنید
بطوریکه یکی از پهلوهای مربع روی قاعده BC واقع باشد.

۳۰- چه عددی برابر بر خ نام و بر خ شمار $\frac{۲۳}{۴}$ افزوده شود تا بر خ حاصل برابر
 $\frac{۳}{۴}$ گردد؟

۳۱- چه مقدار برابر بر خ نام و بر خ شمار بر خ $\frac{۳}{۴}$ افزوده شود تا بر خ حاصل $\frac{۱}{۱۵}$
از یک کمتر باشد؟

۳۲- بر خ ای معادل $\frac{۶}{۸}$ یقین کنید بطوریکه مجموع بر خ نام و بر خ شمارش
۱۳۵ باشد.

۳۳- تفاوت قیمت $\frac{۳}{۴}$ یکتوپ پارچه از $\frac{۵}{۶}$ آن ۶۳ ریال است معلوم
کنید درازای توپ پارچه را در صورتیکه قیمت بر مترش ۹ ریال باشد.

۳۴- به بهاری می توانند ۳۳ درصد وام خود را بپردازند اگر ۵۰۰۰۰ ریال
بیشتر می داشت می توانست $\frac{۳}{۵}$ وامش را ادا کند یقین کنید دارائی و مبلغ

وامش را.

۳۵- شخصی خانه اش را به ۳۸۰۰۰ ریال فروخت باندازه ۵ درصد خرید ضرر کرد معلوم کنید قیمت خانه را.

۳۶- تاجری مقداری پارچه خرید خیال کرد که اگر متری ۱۲۵ ریال بفروشد در تمام پارچه ۴۱۴۰ ریال سود میبرد اتفاقاً متری ۹۷٫۵ ریال بیشتر فروخت در نتیجه ۹۲۰ ریال در سودش تمام پارچه زیان کرد معلوم کنید طول پارچه را.

۳۷- شخصی از نقطه A با تندی ۱۸ کیلومتر در ساعت شخص دیگر را که از نقطه B با تندی ۱۵ کیلومتر شروع به حرکت نموده دنبال می نماید معلوم کنید در چه فاصله از نقطه B با و می رسد در صورتیکه $AB = ۴۲$ کیلومتر باشد.

۳۸- دو چرخ سواری برای رسیدن از منزل بمقصدی هر دقیقه ۱۵۰ متر راه می پیمایند در موقع برگشتن بواسطه سرایشی هر دقیقه ۳۶۰ متر طی میکنند معلوم کنید دوری مقصدش را از منزل در صورتیکه مدت رفتن و برگشتن بر روی هم یک ساعت ۲۵ دقیقه باشد.

۳۹- دو دوچرخه سوار از یک نقطه در سطح معین حرکت نمودند تندی اولی ۱۷ کیلومتر در ساعت و تندی دومی ۱۳٫۲ کیلومتر در ساعت است پس از سه ساعت راه برای اینکه دومی عقب نماند اولی تندی خود را ساعتی دو کیلومتر نمود معلوم کنید پس از چند ساعت دومی با اولی می رسد.

۴۰- شخصی راهی را با تندی ۱۲ کیلومتر در ساعت میرود اگر با تندی ۸ کیلومتر

میرفت دو ساعت دیرتر بمقصد میرسید معلوم کنید در ازای راه را.

۴۱- مطلوبست تعیین درازا و پهنای راست گوشه ای که دوره آن ۳۲۰ متر باشد.

باشد بار است گوشه ایکه درازا و پهنایش ۲۵ متر و ۱۵ متر است.

۴۲- زارعی برای خرید ۱۶۰ گاو و گوسفند ۳۴۸۰۰ ریال داد معلوم

کنید قیمت هر گاو و گوسفند را در صورتیکه بدانیم عدد گوسفند سه برابر عدد گاو بود

و قیمت ۲۰ گوسفند معادل قیمت ۳ گاو باشد.

۴۳- شخصی مقداری پارچه خرید تری ۵ ریال در موقع فروش $\frac{1}{5}$ آنرا تری

۵۴ ریال و $\frac{1}{4}$ آنرا تری ۲۹ ریال و بقیه را تری ۶ ریال فروخت معلوم کنید

درازا ی پارچه را در صورتیکه بدانیم در فروش تمام پارچه ۱۶۶ ریال سود برده است.

۴۴- فاصله نقطه B از A ۵۸۸ کیلومتر است تری این فاصله را در ۹

ساعت و ۴۰ دقیقه پیاده باین طریق که از نقطه A تا نقطه C (بین A و B)

با تندی ۷۰ کیلومتر در ساعت حرکت نمود و از C تا B تندی ۵۱ کیلومتر در ساعت

بوده است معلوم کنید موضع نقطه C را

۴۵- دو کارگر بایکدیگر کار میکنند مزد یک روز کارگر اول ۵ ریال بیش از

مزد یک روز کارگر دوم است مطلوبست مزد روزانه هر یک در صورتیکه بدانیم مزد

۲۵ روز کارگر اول ۶۵ ریال بیش از مزد ۳۰ روز کارگر دوم است.

۴۶ - شخصی گشت زاری را خرید یکدفعه ۲۵۰۰ ریال برای هزینه قبالة

نویسی برای $\frac{1}{2}$ بهار گشت زار پرداخت دفعه دوم $\frac{1}{4}$ باقیانده را ۱۰۰۰ ریال کم
و دفعه سوم در موقع تفریغ حساب ۱۰۰۰ ریال را معلوم کنید بهار گشت زار و هزینه
قبالة نویسی را.

۴۷ - تخیلی را میان دو نفر تقسیم کردیم بطوریکه بهره اولی $\frac{2}{3}$ بهره دومی
و دو یکت بهره اول با $\frac{1}{3}$ بهره دوم روی بسم ۱۰۰۰ ریال شده است بهره
بریک چند است؟

۴۸ - کالائی ۱۴۰ ریال ارزشش دارد آن را چند بفروشیم تا ۲ درصد
فروشش سود ببریم؟

۴۹ - شخصی در فروش کالائی ۱۵ درصد خرید سود برد ولی اگر ۵۵ ریال بیشتر
بفروخت سودش ۱۴ درصد فروش میبود تعیین کنید سود را

۵۰ - شخصی ۱ ساعت بجاری دارد و باید در شگه ای که در هر ساعت ۱۲ کیلومتر حرکت
میکنند ببردش میرود پس از چند مدت باید از در شگه پناوه شده با تند ی ۴ کیلومتر در ساعت
برگردد تا در موقع تعیین بکار خود مشغول شود؟

۵۱ - حوضی دارای دو راه آبست اولی اگر باز باشد حوض پس از ۴ ساعت پر

میشود و اگر راه آب دوم تنها باز باشد حوض در شش ساعت پر میشود معلوم کنید اگر حوض خالی باشد و هر دو راه آب باز نمایند در چند ساعت پر میشود؟

۵۲- حوضی در راه آب دارد که چون با هم باز باشند حوض در یک ساعت و ۱۲ دقیقه پر میشود ولی راه آب به تنهایی حوض را در سه ساعت پر میکند معلوم کنید راه آب دوم به تنهایی حوض را چند ساعت پر میکند؟

۵۳- شخصی بر سرمایه اش چهار یک آنرا ۱۱ فروز و ۵ سال دوم برای سرمایه جدید پنج یک آنرا ۱۱ ضافه کرد و ۵ سال سوم برای سرمایه جدید شش یک آنرا ۱۱ فروز برای سال چهارم ۷۱۴۰۰ ریال سرمایه داشت معلوم کنید سرمایه سال اول را.

۵۴- شخصی $\frac{۷}{۱۳}$ (سه دانگ و نیم) زمینی را جری ۱۲۵۰ ریال و باقی را جری ۱۱۲۵ ریال فروخت ولی اگر تمام را جری ۱۱۰۵ ریال میفروخت ۲۲۳۰۰ ریال زیان میکرد معلوم کنید فروش زمین و مساحت آنرا.

۵۵- ظرفی دارای ۱۵ من سرکه بود که هر یک من آن ۳۵ ریال میارزید قدری آب در آن ریختیم قیمت مخلوط صدی بیت کم شد معین کنید وزن آب را.

۵۶- مواجب سالیانه نوکری ۹۰۰ ریال بایکدست لباس است نوکری پس از ده ماه کار از خدمت معاف شد درین مدت ۷۲۰۰ ریال و یکدست لباس گرفته بود معلوم کنید قیمت لباس را.

۵۷- دارائی دو نفر دویم ۱۲۰۰ ریال است اگر آتی $\frac{1}{4}$ دارائی خود را و دومی $\frac{3}{4}$ دارائی خودش را خرج نمایند دارائی آن دو برابر میشود- دارائی هر یک چند است ؟

۵۸- دو اتومبیل از دو نقطه A و B با فاصله $AB = ۱۳۵$ کیلومتر اگر در یک لحظه حرکت نموده بطرف هم روند در ۵۴ کیلومتری A بهم میرسند ولی اگر آتی پنج دقیقه پیش از دومی براه افتد نقطه ملاقات در ۵۷ کیلومتری A خواهد بود معین کنید سندی هر یک ؟

۵۹- دو نفر با هم شرکت کردند سرمایه آتی ۶۰.۰۰۰ ریال پیش از سرمایه دومی بود در نتیجه سودش ۲۵۰۰۰ ریال بیش از سود دومی گردید یقین کنید سرمایه هر یک را در صورتیکه سود آتی

دویم ۱۰۰۰۰۰ ریال باشد .

۶۰- سه متحرک از سه نقطه A و B و C واقع بر یک خط در جهت ABC حرکت میکنند سندی آنها بر تریب ۳۵ کیلومتر و ۱۱ کیلومتر و ۲۵ کیلومتر است . متحرک اول ساعت ۹ صبح و دو متحرک دیگر ساعت ۷ صبح حرکت میکنند معلوم کنید پیش از چند متحرک دومی بیک فاصله از دو متحرک دیگر خواهد بود در صورتیکه می دانیم $AB = ۶۷$ کیلومتر و $BC = ۴۲$ کیلومتر است .

۶۱- شخصی $\frac{4}{5}$ دارائی خود را از قرار $\frac{1}{4}$ و باقی را از قرار $\frac{1}{5}$ به بهره کاری (مجاز)

میکند از دویم سود سالانه اش ۲۹۴۰ ریال شد و است دارائی او چند بود ؟

۶۲- شخصی سرمایه اش را که ۲۴۰.۰۰۰ ریال است به دو قسمت نمود و یک قسمت را

از قرار ۴۵٪ بابتی را از قرار ۶٪ بهره کاری میگذارد سود سالیانه اش با نده سود
تمام سرمایه از قرار ۵٪ است هر یک از دو قسمت سرمایه چند بوده است؟

۶۳- سود و سرمایه که یکی ۵۴۰۰۰ ریال و دیگری ۳۲۰۰۰ ریال است پس از
۲۱۶ روز روبرویم ۲۰۹۷۰ ریال شده است اگر نرخ سود روزی هم ۸٪ باشد نرخ هر یک
چند است؟

۶۴- شخصی سرمایه اش را که ۴۱۸۰۰۰ ریال است بدو قسمت میفاید پاره ای از آن را
از قرار ۳٫۲٪ و پاره دیگر را از قرار ۲٫۷۵٪ بهره کاری مینماید پس از ۳۱۵ روز
پاره اول ۲۹۵۷۵ ریال بیش از سود پاره دوم میشود هر قسمت چند است؟

۶۵- سر رسید اموال دو برات یکی یکسال و دیگری که مبلغ آن ۴۵۰۰۰ ریال
بیش از اولی است ۱۸ ماه است اگر نرخ بهره ۴٫۵٪ باشد و تنزیل آن را روزی هم
۴۱۰۸۵ ریال شود مبلغ اسمی هر یک چند است؟ (به تنزیل داخلی و خارجی)
۶۶- دو برات یکی ۳۶ روزه و دیگری ۵۴ روزه است مبلغ فعلی آنها برابر
از قرار ۵٪ و ۶٪ یکی است تعیین کنید مبلغ اسمی دو برات را در صورتیکه روزی
هم ۴۹۶۵۰ ریال باشد (بهره و تنزیل).

۶۷- براتی ۱۲۶ روزه است و مبلغ فعلی آن به تنزیل داخلی ۱۴۷ ریال
از مبلغ فعلی آن به تنزیل خارجیت اگر نرخ ۵٪ باشد مبلغ اسمی برات چیست؟

۸- چقدر طلا و مس را با هم بیاوریم تا ۱۲۵۰ گرم شش بعبار ۹۰۰ بدست آید؟

۹- شمش است از طلا و مس بعبار ۷۹۰ و وزن ۴۵۹ گرم چقدر طلای خالص بر آن باید

افزود تا عیار مخلوط ۹۰۰ شود؟

۱۰- در ۳۰۴ کیلوگرم آب ۲۰۰ گرم نمک طعام محلول است درین محلول چقدر آب خالص

بریزیم تا آنکه ۲۰ کیلوگرم آن فقط ۸۰ گرم نمک داشته باشد؟

۱۱- در ظرفی ۲۷۵ لیتر شیر است که بهای هر لیتر آن ۱۵ ریال است چقدر آب

در آن بریزیم تا اینکه بهای یک لیتر مخلوط یکت ریال شود؟

۱۲- در ۳۰۰ لیتر شیر که لیتری ۱۰۴۵ ریال ارزش دارد چقدر شیر لیتری یکریال

بریزیم تا مخلوط لیستری ۱۳۰ ریال ارزش داشته باشد؟

۱۳- ۲۲ کیلوگرم آب در یک کیلوگرم نمک دارد چقدر آب بی نمک بر آن بفریم

تا اینکه ۳۲ کیلوگرم مخلوط ۱۲۰ گرم نمک داشته باشد؟

۱۴- شمش است از نقره بعبار ۸۲۵۰ و هرگاه دو کیلوگرم نقره خالص آن بفرایم عیار

آن به ۸۵۰۰ میشود وزن شش چقدر است؟

۱۵- شمش است از نقره وزن یک کیلوگرم و بعبار ۸۰۰ چقدر نقره بعبار ۹۶۵

آن بیاوریم تا عیار آمیزه ۷۵۰ شود؟

۱۶- آمیزه است از طلا و مس وزن ۳۵۰ گرم و بعبار ۹۲۰ چقدر مس بر آن بفریم

- تا عیار آمیزه ۹۰ ر. شود؟
- ۷۷- دو آمیزه است یکی بعیار ۹۰ ر که چون بوزنهای مساوی آن دو را با یکدیگر
آمیزه حاصل ۸۳۵ ر. شود تعیین کنید عیار آمیزه دوم را.
- ۷۸- دو شمش از نقره و مس در دو سکه عیار شمش اول ۹۶ ر. و وزن نقره خالص $\frac{3}{4}$
وزن نقره خالص شمش دوم است اگر آن دو را با هم بزنند وزن آمیزه حاصل ۶۰۰ گرم
و عیارش ۶۴ ر. میگردد تعیین کنید وزن برکت از دو شمش و عیار دومی را.
- ۷۹- دو شمش است از نقره و آلی بوزن ۵۰۰ گرم که چون ۲۰ گرم نقره پهن بر آن بفرزیند عیار
آن بالا میرود شمش دوم عیارش ۸۵ ر. که چون ۵۰ گرم نقره خالص از آن بگیرند عیارش ۸۳ ر.
پایین میرود عیار شمش اول و وزن شمش دوم چقدر است؟
- ۸۰- وزن مخصوص طلا ۱۹ و وزن مخصوص مس ۱۰ است آمیزه ایست از طلا و مس بوزن ۵۰ گرم
و بوزن مخصوص ۱۵ معلوم کنید این آمیزه از چند گرم طلا و چند گرم مس ساخته شده است؟
- ۸۱- تاج پیرن^۱ پادشاه سیراکوز^۲ ۲۰ لیور^۳ (هر لیور ۵۰۰ گرم) وزن داشت
از شمس عالم مشهور معلوم کرد که در آب $\frac{1}{4}$ لیور از وزنش کاسته میشود و از آن رو
وزن طلا و نقره تاج را بدست آورد. تعیین کنید این دو وزن را در صورتیکه بدانیم وزن
مخصوص طلا ۱۹ ر. و از نقره ۱۰ ر. است.

۸۲- $\frac{5}{37}$ وزن قلع در آب کاشته میشود و $\frac{2}{33}$ وزن سرب آمیزه است از قلع و سرب بوزن ۶۰ کیلو گرم که چون آنرا در آب وزن کنیم ۷ کیلو گرم از وزنش کاسته میشود. از چند گرم قلع و چند گرم سرب آمیخته شده است؟

۸۳- بالنی از A به B که فاصله ۵۰ کیلومتر است حرکت نمود پس از رسیدن به نقطه B به A برگردد چون جهت وزش باد از A بطرف B است مدت رفت یک ساعت و مدت برگشتن دو ساعت و ۱۵ دقیقه است تعیین کنید تندی بالنی در هر دوای بی حرکت و تندی باد را.

۸۴- دو متحرک از نقطه A بر محیط دایره ای حرکت می کنند ذلی تمام محیط را در ۲۷ $\frac{1}{4}$ روز و دومی در $\frac{1}{4}$ روز می پیمایند اگر هر دو در یک محله و در یک جهت حرکت کنند تعیین کنید پس از چه مدت بیکدیگر خواهند رسید؟

۸۵- گلدانیت از نقره بوزن ۷۴۶ گرم که وزن آن در آب ۶۷۱ گرم است تعیین کنید عیار گلدان را در صورتیکه وزن مخصوص نقره و مس ترتیب ۱۰٫۴۷ و ۸٫۹ باشد

۸۶- $\frac{3}{4}$ ظرفی آب شور است که هر لیتر آن ۱۰۸۰ گرم وزن دارد اگر سه لیتر آب خالص در آن بریزند یک لیتر مخلوط ۱۰۷۰ گرم وزن خواهد داشت تعیین کنید نجایش ظرف را.

۸۷- دوچرخه سواری با تندی ۲۰ کیلومتر در ساعت میخواد به شخصی که ۱۰ کیلومتر از او دور است با تندی ۲۵ کیلومتر در ساعت حرکت میکند برسد پس از چند مدت با آن شخص خواهد رسید؟

۸۸- پیاده ای از نقطه A و دوچرخه سواری از نقطه B در یک خط بطرف هم حرکت میکنند پس از چند ساعت پیاده از دوچرخه سوار از نقطه A بیک فاصله خواهد بود در صورتی تندی پیاده در ساعت ۵ کیلومتر و تندی دوچرخه سوار ۱۵ کیلومتر و فاصله AB سی و دو کیلومتر باشد.

ب- بحث در مسئله های فکری درجه اول

۵۱- چنانکه دیدیم حل یک مسئله فکری درجه اول یک مجهول منجر بحل یک یا چند مجهول دیگر میشود که جواب آن همچندی در حالت کلی جواب مسئله است ولی ممکن است که جواب همچندی موافق با شرطهای مسئله نباشد و در این صورت جواب مسئله نخواهد بود.

۵۲- تعریف- بحث در یک مسئله فکری عبارتست از تحقیق در اینکه جواب یا جوابها اینکه از روی همچندی مسئله بدست بیاید آیا جواب مسئله هست یا نه برای روشن شدن این موضوع و نیز برای اینکه در ضمن راه علی بحث بدست آید بحل بحث مسئله های زیر میپردازیم:

مسئله ۱- کتابفروشی ۱۲ جلد کتاب جبر و هندسه به ۱۱۵ ریال خرید در صورتیکه بدین قیمت یک جلد جبر ۱۲ ریال یک جلد هندسه ۹ ریال باشد معین کنسید از هر کدام چند جلد خریده است؟

حل- چون شماره کتابهای جبر را x فرض کنیم شماره کتابهای هندسه $x - ۱۲$ میشود پس معین میسند اینست $۱۱۵ = ۹(x - ۱۲) + ۱۲x$ و جواب میسند

$$x = \frac{۷}{۳} \text{ است}$$

بحث- چون جواب مسئله شماره کتابست بنا بر این باید عدد درست باشد یعنی $\frac{۷}{۳}$ نیست و از جواب مسئله باشد بنا بر این مسئله غلط است یعنی با ۱۱۵ ریال با قیمت ۱۱۵ در مسئله گفته شده نمیتوان ۱۲ جلد کتاب جبر و هندسه خرید.

مسئله ۲- پدری ۵۵ سال دارد پسرش ۳۱ سال پس از چند سال سنی او برابر سال پدر میشود؟

حل- مدت مجبوراً x میگیریم پس ازین مدت سال پدر $۵۵ + x$ و سال پسر $۳۱ + x$ خواهد بود و از روی مسئله این معین میسند

$$۵۵ + x = ۲(۳۱ + x)$$

که جواب آن $x = -۷$ است

بحث- از روی صورت مسئله چنین بر میآید که جواب مسئله نیست

باشد و چون برای x مقدار منفی پیدا شده معلوم میشود مسئله باین قسمی که طرح شده است

جواب ندارد.

ولی میتوان جواب منفی را اینطور تعبیر نمود که در ۷ سال پیش سال پدر و برابر

سال پسر بوده است

$$\text{سال پدر} = 55 + x = 55 - 7 = 48$$

$$\text{سال پسر} = 31 + x = 31 - 7 = 24$$

مسئله ۳- سرکه فروشی دو قسم سرکه دارد که قیمت یک لیتر اولی ۱٫۲۵ ریال

و قیمت یک لیتر دومی ۱ ریال است میخواهد از این دو قسم سرکه m لیتر مخلوط بصیفت

هر لیتری a ریال تهیه کند. از هر کدام چند لیتر بردارد؟

حل- اگر شماره لیترهای سرکه قسم اول را x بگیریم شماره لیترهای سرکه قسم دوم

$m-x$ میشود بنابراین بجای مسئله چنین است

$$1.25x + (m-x) \times 1 = am$$

$$x = \frac{m(a-1)}{0.25}$$

که جواب آن چنین است

$$m - \frac{m(a-1)}{0.25} = \frac{m(1.25-a)}{0.25}$$

و شماره لیترهای سرکه دوم اینست


بحث- چون جواب مسئله شماره لیتر است بنابراین باید عددی مثبت باشد

پس شماره لیترهای یکم بدست آوردیم یعنی $\frac{m(a-1)}{0.25}$ و $\frac{m(1.25-a)}{0.25}$

دقی جواب مسئله اند که عدد مثبتی باشند و چون m مثبت است باید $(a-1)$ و $(a-1, 25)$ هر دو مثبت باشند یعنی $0 < a-1$ و $0 < a-25$ که از اول $a > 1$ و از دومی $a < 25$ نتیجه میشود که میتوان گفت برای اینکه مسئله دارای جواب باشد باید a درین دو شرط صدق کند $1 < a < 25$ و در حالت مخصوص ممکن است شماره لیتراهای یکی از دو قسم سرکه صفر باشد درین صورت باید $a=1$ و یا باید $a=25$ باشد ولی واضح است که درین مسئله این حالت اتفاق نمی افتد.

تبصره - چنانکه در مسئله بالا دیدیم در مسئله های فکری که در آنها معلوم است بحرف نموده شده عموماً بحث منجر میشود به تعیین شرطهایی بین معلومها برای اینکه مسئله دارای جواب باشد.

۵۳- تعریف: برگاه بر روی محور x بمبد O نقطه ای مانند A داشته باشیم و فرض کنیم متحرکی از نقطه O به نقطه A رود مقدار جبری را همیکه پیروز آبسیس A نقطه A گویند و آنرا چنین نویسند \overline{OA}


 واضح است که اگر آبسیس نقطه ای معلوم باشد موضع آن نقطه بر روی محور را معلوم

(زیر از روی قدر مطلق تبسیر فاصده آن نقطه از مبده و از روی نشانه جهت از ۰ بان
نقطه معلوم میشود) و عکس

تبصره - بطور کلی مقدار جبری را اینکه در روی محور x از نقطه ای مانند A تا نقطه ای مانند B پیوده میشود \overline{AB} بنامیم و واضح است که $\overline{AB} = -\overline{BA}$ و یا $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$

مسئله - اگر A و B ترتیب a و b باشد معلوم کنید که
جبری نقطه AB را (یعنی امتداد جبری را یکبار باید از A تا B پیاده شود)
اولاً - اگر a و b هر دو مثبت باشند بفرض $a < b$ شکل زیر حاصل میشود

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

(۱) $\overline{AB} = b - a$ و یا $a + \overline{AB} = b$ که از آن نتیجه میشود

و بفرض $a < b$ این شکل را خواهیم داشت

$\overline{OB} + \overline{BA} = \overline{OA}$

و یا $c + \overline{BA} = a$ و چون $\overline{BA} = -\overline{AB}$ است پس خواهیم داشت

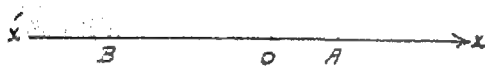
یعنی در بحالت $\bar{A}\bar{B} = 0 - \alpha$ که اؤان نتیجه بشود $\bar{A}\bar{B} = \alpha - 0$

هم همان تساوی را، برقرار است
ثانیاً - اگر α و β هر دو منفی باشند باز مانند بالا ثابت خواهد شد که

$$\overline{AB} = \beta - \alpha$$

ثالثاً - اگر α و β دارای یک نشانه نباشد مثلاً $\alpha < 0$ و $\beta > 0$ باشد

مثل این شکل



خواهیم داشت $\overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AB}$ و چون $\overline{AO} = -\overline{OA}$ است

پس $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ و با $\overline{AB} = \beta - \alpha$ که همان تساوی (۱) است

پس این تساوی همیشه برقرار است
یعنی $AB = \beta - \alpha$

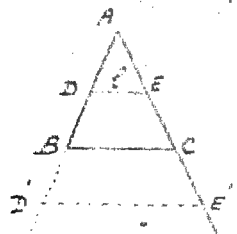
۵۴- مقدار جبری قطعه خط AB که بر محوری واقع است مساویست

با آبسیس انتها (نقطه B) منهای آبسیس مبدأ (نقطه A)

مسئله ۴- مثلث ABC داده شده است بر ضلع AB نقطه ای مانند D

پیدا کنید که چون از آن نقطه خطی موازیات BC رسم شود نقطه تقاطعش را با AC به E بنام

قطعه DE در ازای معلوم صحیح باشد



حل - برای پیدا کردن نقطه D قطعه خط

DE را مجهول بگیریم.

برای حل مسئله از راه جبر محوری منطبق بر AB بمبد B اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم جهت مثبت این محور از B به A باشد. حال مقدار جبری BD را به x بنمایم از تشابه دو مثلث ABC و ADE نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \quad (\text{باید متوجه بود که دو طرف تساوی باید هم نشانه باشند})$$

و یا $\frac{c-x}{c} = \frac{e}{a}$ (بوجب ۵۲) که از حل آن مقدار جبری BD بدست می‌آید:

$$x = \frac{c(a-e)}{a} = c\left(1 - \frac{e}{a}\right)$$

بحث- اگر $e > a$ باشد $\overline{BD} = x$ مثبت است و کوچکتر از c یعنی

نقطه D بین A و B خواهد بود.

اگر $e < a$ باشد x منفی می‌شود درین حالت نقطه D در نقطه‌ای مانند D' خواهد بود یعنی DE در خارج مثلث می‌افتد.

در حالت مخصوص $e = a$ مقدار x صفر و نقطه D بر B منطبق می‌شود

از روی شکل نیز نتیجه این بحث را می‌توان تحقیق نمود.

تمرین ۱- همین مسئله را حل کنید وقتی که جهت منفی از B به A باشد.

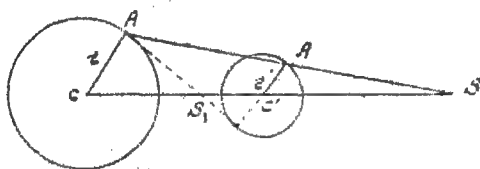
تمرین ۲- حل کنید همین مسئله را وقتی که مجهول \overline{AD} باشد

۵۵- تبصره- برای حل کردن مسئله‌های هندسی از راه جبر وقتی که مجهول تنها

دارای دو سو باشد بهتر است مسئله بالا محور و مبدهای اختیار کنیم تا اینکه بحث

آسان شود

مسئله ۵- در دو دایره c و c' که شعاع بزرگتر c و c' باشد
چون انتهای شعاع موازی را یکدیگر وصل کنیم خط cc' را در نقطه ای مانند s قطع
موضع این نقطه را بیابیم. برای پیدا کردن این نقطه cs را مجهول میگیریم چون این
مجهول میتواند دارای دو سو باشد بنا بر این محوری بر cc' ببرد c اختیار نمیکنیم و
فرض میکنیم که جهت مثبت آن از c به c' باشد حال اگر cs را مساوی x بگیریم از
تشابه دو سه گوشه sac و sac' خواهیم داشت (بفرض $cc' = d$):



$$\frac{x}{x-d} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} \quad \text{و یا (۵۴)} \quad \frac{\overline{CS}}{\overline{c's'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$$

$$x = d \frac{\overline{AC}}{\overline{AC} - \overline{AC'}} \quad \text{و از اینجا}$$

حالت اول \overline{AC} و $\overline{AC'}$ دارای دو سوی مختلف میباشد اگر \overline{AC}

را $+c$ (یا $-$) بگیریم $\overline{AC'}$ مساوی $-c'$ (یا $+c'$) خواهد شد پس

$$x = d \frac{c}{c + c'}$$

بحث- در نقاط $x = \overline{CS}$ همیشه مثبت؛ از d کوچکتر است یعنی نقطه

که بین c و c' قرار بگیرد (مانند نقطه s در شکل)

حالت دوم \overline{AC} و $\overline{AC'}$ دارای یک جهت میباشند. در این صورت

$$x = d \frac{c}{c' - c}$$

بحث - اگر $c' > c$ باشد x مثبت از d بزرگتر است بنابراین نقطه s

در آن طرف c' میافتد

و اگر $c' < c$ باشد x منفی میشود یعنی نقطه s در آن طرف c قرار میگیرد. یعنی همیشه مرکز دایره کوچکتر واقع میشود بین مرکز دایره بزرگتر و s یعنی نقطه ای که امتداد خط وصل بین انتهای دو شعاع موازی بهم جهت خط دو مرکز را قطع میکند

حالت سوم یا حالت مخصوص وقتی که $c' = c$ باشد. در این صورت

$$x = d \frac{c}{c' - c}$$

یعنی مسئله جواب ندارد
در این حالت دو دایره مساوینند و خطی که انتهای دو شعاع موازی بهم جهت را وصل میکند موازی خط cc' میشود و پیدا است نقطه تلاقی ندارد

هرگاه فرض کنیم در حالت $x = d \frac{c}{c' - c}$ شعاع کوچکتر بتدریج بزرگ شود در این صورت $c' - c$ بتدریج کوچک شده و نسبت صفر میل میکند و لذا قدر مطلق x رفته رفته بزرگ میشود یعنی نقطه s از c دور میشود بطوریکه وقتی c' مساوی c شود این نقطه در فاصله پهنایت دور از نقطه c واقع میشود و در این حالت است که d

خط موازی شده و گوئیم که نقطه تلاقی آنها در بینهایت دور واقع است.

تمرین

۱- متحرکی بر محور xx از مبدا O با تندی v متر ثانیه حرکت میکند پس از a ثانیه

با تندی v' راه می‌رود معلوم کنید پس از چند ثانیه بفاصله d از نقطه O واقع میشود؟

۲- دو چرخ سواری با تندی v کیلو متر در ساعت میخوابند متحرکی که d کیلو متر از دور است

و با تندی v' کیلو متر در ساعت حرکت میکند برسد پس از چه مدت با او خواهد رسید؟

۳- بر خط راستی سه نقطه O و A و B واقعست $\vec{OA} = \alpha$ و $\vec{OB} = \beta$ برای این

خط نقطه‌ای مانند M پیدا کنید بطوریکه فاصله اش از نقطه A میانگین هندسی باشد پس فاصله اش

از نقطه‌ای O و B

را، بنامی - برای خط محوری مبدا O اختیار نموده فاصله مجهول OM را مساوی

میگیریم.

۴- در سه گوشه‌ای که قاعده اش بدرازای a متر و ارتفاع دارد برای این قاعده

بدرازای چه متر است راست گوشه‌ای محاط کنید که پیرامونش 2π متر باشد.

۵- در سه گوشه مستطیل پیش راست گوشه‌ای محاط کنید که تفاضل دو پهلوش d متر باشد

۶- از دو ارتفاعی دو قاعده و ارتفاع معلوم است بدست آید فاصله نقطه تقاطع دو

میان را از هر قاعده.

۷- ضلعهای سه گوشه ای بدر ازای a و b و c است نقطه ای بر پهلوی a طوری پیدا کنید که چون از آن دو نقطه دو خط موازات دو ضلع دیگر رسم کنیم مجموع دو قطعه این دو خط واقع در درون سه گوشه بدر ازای معلوم h باشد.

۸- A و B و C سه نقطه از یک خط ثابت کنید که اگر روی آن خط به نوا یک نقطه O بگیریم خواهیم داشت:

$$\overline{OA} \cdot \overline{BC} + \overline{OB} \cdot \overline{CA} + \overline{OC} \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0$$

۹- دو نقطه A و B در یک طرف خط راست RR' و با فاصله ای a و b از آن واقع بر خط RR' نقطه ای مانند C طوری پیدا کنید که پهنه سه گوشه ABC مساوی $\frac{1}{4}K^2$ شود.

راه بنهایی - بر خط RR' محوری اختیار نموده دو موقع عمود نقطه A را بمید آن میگیریم فاصله نقطه A را از این مبدا که مجهولست x فرض میکنیم و فاصله دو عمود A و B را d میگیریم

فصل چهارم

الف - حل دستگاههای معادلات خطی در مجهول

۵۰- ممکن است بعضی مسئله های فکری در جواب پیش از یک مجهول داشته باشند. برای حل آنها از راه جبر چون موافق قاعده (۵۰) عمل کنیم مثلاً بیک یا چند معادله درجه اول میرسیم که پیش از یک مجهول دارند مانند مسئله های زیر:

مسئله ۱- قیمت ۵ متر مایهوت و سه متر فاستونی بر روی هم ۱۲۶۰ ریال است معلوم کنید قیمت یک متر مایهوت را.

چون قیمت یک متر مایهوت را x ریال و قیمت یک متر فاستونی را y ریال فرض کنیم از روی فرض مسئله این معادله بدست می آید

$$(۱) \quad ۵x + ۳y = ۱۲۶۰$$

که یک معادله دو مجهول است

اگر فرض کنیم قیمت یک متر مایهوت ۱۸۰ ریال باشد یعنی $x = ۱۸۰$ معادله

دو مجهولی (۱) تبدیل بیک معادله در یک مجهولی $۹۰۰ + ۳y = ۱۲۶۰$ و یا

$$۳y = ۱۲۶۰ - ۹۰۰$$

$$y = ۱۲۰ = ۲ \times ۶۰ \quad \text{یعنی ۱۲۰ ریال} \quad x = ۱۸۰ = ۳ \times ۶۰ \quad \text{یعنی ۱۸۰ ریال}$$

$x = ۱۲۰$ ریال است این دو عدد را جواب همچندی (۱) گویند

همچنین اگر قیمت یک تریا هوت را ۱۵۰ ریال بگیریم یعنی $x = ۱۵۰$ ریال

همچندی (۱) تبدیل بیک همچندی یک مجهولی $۱۲۶۰ = ۳x + ۷۵۰$ و یا

$\frac{۱۲۶۰ - ۷۵۰}{۳} = x$ میشود که در این صورت قیمت یک تریا فاستونی چنین است

$x = ۱۷۰$ ریال یعنی بازار $x = ۱۵۰$ ریال $x = ۱۲۰$ ریال

این دو عدد نیز یک جواب برای همچندی (۱) میباشد

بهین طریق بازار هر مقدار یک x بدسیم برای x مقداری پیدا میشود و این مقدار

یک جواب همچندی (۱) است و چون x اختیار است یعنی میتوانیم بجای آن

هر عددی که بخواهیم بگذاریم بنا بر این همچندی (۱) دارای جوابهای بی شمار

ممکن است در همچندی (۱) x یعنی قیمت یک تریا فاستونی را معلوم بگیریم در این صورت مقدار

x یعنی قیمت یک تریا هوت بدست میآید.

از مسئله بالا معلوم میشود که: هر همچندی دو مجهولی درجه اول جوابهای بی شمار دارد

مغاله اگر بیک از دو مجهول همچندی مقداری اختیار می‌کنیم و آن را در معادله

دیگر از روی آن معلوم میشود

۵۷- قاعده - برای حل همچندی دو مجهولی $ax + by = c$

که در آن a و b مخالف صفرند، چون x را معلوم فرض کنیم x از روی آن

بهست میآید $y = \frac{c - ax}{b}$ واضح است که در مقابل بر مقداری از x مقداری برای y پیدا میشود.

و اگر y را معلوم بگیریم x از روی آن حساب میشود $x = \frac{c - by}{a}$ یعنی نظیر هر مقداری از y مقداری برای x پیدا میشود.

تمرین های شفاهی

۱- پنجذیهای زیر را حل کنید و متسکبه x مرتبه های ۱ و ۱- و $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ داده شود.

$$2x - 2y = 7 \quad , \quad x = 4y + 5$$

$$2x - 3y + 1 = 0 \quad , \quad 5x = 2y - 11$$

$$2y = 7x - 1 \quad , \quad 12x - 2y - 5 = 0$$

۲- در سئله بالا عدد x را بهیسه و پنجذیها را حل کنید.

۳- در پنجذیهای زیر معین کنید عدد x یکله جلوی هر پنجذی نوشته شده جواب آن پنجذی

بسیانیت (عدد اول بجای x و عدد دوم بجای y)

$$2x - 2y = 7 \quad \left| \begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{array} \right|$$

$$x + 5y = -1 \quad \left| \begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 7 \end{array} \right|$$

$$2x - 5 = y \quad \left| \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \end{array} \right|$$

۴- در هر یک از پنج یبای زیر دو عدد پیدا کنید که جواب آن پنج‌دی باشد و دو عدد بنویسید که جواب نباشد.

$$2x - y = 1$$

$$3x - 2y = 0$$

$$y - 2 = 2x$$

$$5x + 2y = 7$$

۵۸- بطور کلی هر پنج‌دی که بیش از یک مجهول داشته باشد دارای

جوابهای بیشمار است

مثلاً یک پنج‌دی سه مجهولی $ax + by + cz = d$ (بفرض $d \neq 0$) دارای

جوابهای بی‌نهایت و قاعده حل آن اینست که بجای دو مجهول آن عدد دانی اختیاری گذارده و مجهول سوم را از روی آنها حساب کنیم

تمرین شفاهی

۱- اگر بجای x عدد ۱- و بجای y عدد ۲ بگذاریم چه را در هر یک از پنج‌دیا

زیر پیدا کنید:

$$x + y - z = 2$$

$$2x - 3z + 5 = y$$

$$3x - 2z = y - 11$$

$$y + 2z - 3 = x$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

۲- در همین پنج‌دیا این عدد را امتحان کنید

که جواب هستند یا نه (اولی بجای x و دومی بجای y و سومی بجای z)

۵۹- تبصره- دیدیم که هر چندی دو مجولی جوابهای پشمار دارد ولی اگر این چندی دو مجولی

چندی یک مسئله فکری باشد ممکن است همه این جوابها در مسئله صدق نکند چنانکه در مسئله (۱) قیمت پنج متر ماهوت و سه متر فاستونی بر رد بهم ۱۲۶۰ ریال است معلوم کنید قیمت یک متر بر کد را

اولاً بطور کلی قیمت ماهوت یعنی x بیشتر از قیمت فاستونی یعنی y می باشد

و ثانیاً امروز قیمت فاستونی از متری ۵۰ ریال کمتر نیست بنابراین جوابهای چندی واقعی جواب

مسئله اند که این شرطها در آنها صدق کند یعنی $x < y$ و $50 < y$ و چون در چندی

$$(۱) \quad y = \frac{1260 - 5x}{3} \quad \text{است}$$

بنابراین $x < \frac{1260 - 5x}{3}$ و $50 < \frac{1260 - 5x}{3}$ که از حل این دو نامساوی نتیجه بگیریم

$$222 < x < 157.5$$

برای اینکه جوابهای چندی (۱) در مسئله صدق کند باید قیمت یک متر ماهوت را از ۲۲۲ ریال و ۱۵۷.۵

ریال و کمتر از ۲۲۲ ریال انتخاب کنیم تا قیمت فاستونی از ۵۰ ریال بیشتر نشود و از قیمت ماهوت کمتر باشد

در حالت مخصوص اگر قیمت یک متر ماهوت را مساوی ۱۵۷.۵ ریال بگیریم قیمت یک متر فاستونی نیز مساوی

۱۵۷.۵ ریال میشود اگر قیمت یک متر ماهوت را مساوی ۲۲۲ ریال انتخاب کنیم قیمت یک متر فاستونی

مساوی ۵۰ ریال میشود.

تمرین

۱- عددی دو پیکری پیدا کنید که مجموع دو پیکرش ۵ باشد.

۲- پادشاهی را در مدت دو ساعت بموده در ازای راه و تنه‌ی متوقفش را حساب کنید.

۳- اگر قیمت یک جلد کتاب جبر ۱۵ ریال و قیمت یک جلد هندسه ۱۲ ریال باشد میخواهیم با

۱۶۵ ریال ازین کتابها بخریم از هر کدام چند جلد بایمیدهند.

راه بنامی - شماره کتابها باید عدد درست و مثبت باشد

۴- دهقانی با مبلغ ۶۲۰۰ ریال میخواهد چند گاو و گوسفند بخرد اگر قیمت هر گاو ۶۰۰ ریال و

هر گوسفند ۷۰ ریال باشد با این مبلغ چند گاو و چند گوسفند میتواند بخرد؟

راه بنامی - شماره گاو و گوسفند باید درست و مثبت باشد

مسئله ۲- قیمت ۵ متر مایه ۱۲۶۰ ریال است معلوم کنید

قیمت یک متر که ام را در صورتیکه قیمت دو متر مایه ۲۴۰ ریال از قیمت ۵ متر مایه کمتر باشد

حل - چون قیمت یک متر مایه را x ریال قیمت یک متر مایه را y ریال بگیریم

از روی فرض مسئله این دو معادله بدست میآید:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 1260 \\ 2x = 5y - 240 \end{cases}$$

از معادله اول $y = \frac{1260 - 5x}{3}$

و چون y (قیمت یک متر مایه)

در معادله دوم $y = \frac{2x + 240}{5}$

در هر دو معادله یکسایه پس خواهیم داشت:

$$\frac{2x + 240}{5} = \frac{1260 - 5x}{3}$$

که یک پنجمی یک مجولی از درجه اول است و جواب آن $x = ۱۸۰$ ریال است
که از روی آن قیمت یک متر فاستونی $y = ۱۲۰$ ریال بدست میاید

۶- از روی مسئله بالا بدو پنجمی $5x + 3y = ۱۲۶۰$ و
 $2x = 5y - 240$ رسیدیم. گویند این دو پنجمی تشکیل یک دستگاه پنجمی
و دو مجولی درجه اول را میدهند و آن را چنین نویسند:

$$\begin{cases} 5x + 3y = ۱۲۶۰ \\ 2x = 5y - 240 \end{cases}$$

۶۱- تبصره- از مسئله بالا معلوم میشود که هر که ام از مجهولهای یک دستگاه
در تمام پنجمیهای آن دستگاه نمایش بکند و است اچنانکه در پنجمیهای دستگاه
بالا $x = ۱۸۰$ و $y = ۱۲۰$ است

۶۲- حل یک دستگاه- حل یک دستگاه پیدا کردن عددی یا عبارتهایست که
که در پنجمیهای دستگاه صدق کند یعنی چون بر یک از آن عددی یا عبارتهای
مجهول نظیر خودش بگذارد پنجمیهای آن دستگاه و متساویهای عددی را اتحاد
تبدیل شود و این عددی یا عبارت را جواب دستگاه گویند مانند $x = ۱۸۰$
و $y = ۱۲۰$ که جواب دستگاه دو پنجمی دو مجولی

$$\begin{cases} 5x + 3y = 1260 \\ 2x = 5y - 240 \end{cases}$$

است

۶۳- تبصره- از حل مسئله ۲ (صفحه ۱۲۳) می بینیم که برای هر یک از مجهولهای x و y یک جواب بدست می آید در صورتیکه هر یک از پنجدهیهای دستگاه دارای جوابهای پشماراست و معلوم میشود که بین این جوابها فقط یک عدد برای x و یک عدد برای y یافت میشود که در هر دو پنجدهی دستگاه صدق می کنند یعنی عموماً یک دستگاه دو پنجدهی درجه اول دارای یک جواب است

تمرین شفاهی

۱- رسیدگی کنید که عدد های ۲- | جواب کدام یک از دستگاههای زیر است

$$\begin{cases} 2x - 1 = 3y \\ 5x - 2y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 16 = 2y \\ x - y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 2 \\ 2x - 5y = 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - \frac{1}{3} = y \\ \frac{x}{3} + 2y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

۲- در دستگاههای زیر رسیدگی کنید آیا عدد های مجوی هر دستگاه نوشته شده جواب

آن دستگاه هست یا نیست

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - 1 = \frac{y}{4} - 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 1.5x - 2.5y = 5 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 2 \\ -4 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 2x - 5 = 3y + \frac{1}{3} \\ 3x - \frac{2}{3} = y - 1 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 5 \\ 2 \end{array} \right.$$

۱- حل دستگاه دو مجهولی درجه اول

۴- حل کردن یک دستگاه دو مجهولی چنانکه گفتیم (شماره ۶۲) پیدا کردن جواب دستگاه است یعنی عددی یا عبارتهایی که بر گاه بجای مجهولها گذارده شود هر یک از دستگاه بیک تساوی عددی یا یک اتحاد تبدیل شود.

۵- قاعده حل - قاعده کلی برای حل یک دستگاه دو مجهولی دو مجهولی (یا چند مجهولی چند مجهولی) آنست که از روی آن دستگاه مجهولی یک مجهولی پیدا کنیم بطوریکه جواب آن به چند همبواب دستگاه باشد

برای این منظور این نکته را در نظر بگیریم که جواب هر مجهول عددی یا عبارتست که در تمام به چند همبوابی دستگاه صدق کند.

مثال ۱- دستگاه دو معجزی دو مجهولی:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \quad \text{را حل کنید}$$

حل- از روی این دستگاه میتوان یک معجزی یک مجهولی بر حسب y بدست آورد برای این کار فرضیت که y ازین دو معجزه را از دیگری کم کنیم (زیرا چون هر یک نمایش یک تساوی عددی هستند بنا بر این از کاستن آنها از هم نیز یک تساوی عددی پیدا میشود) مثلاً اگر دو طرف معجزی اول را تریب از دو طرف معجزی دوم کم کنیم (چون هر مجهول در دو معجزی دستگاه نمایش یک عدد است) این معجزی بدست میآید $3y = 3$ که از آن پیدا میشود $y = 1$

و چون بجای y در یکی از دو معجزی دستگاه (مثلاً معجزی دوم) عدد 1 را گذاریم معجزی یک مجهولی $3x + 1 = 7$ بدست میآید که از حل آن $x = 2$ است پس جواب دستگاه عددی 1 و 2 میباشد (که چون بجای x و y در معجزیهای دستگاه گذاریم چنانکه دیده میشود دو تساوی عددی $3 \times 2 - 2 \times 1 = 4$ و $3 \times 2 + 1 = 7$ پیدا میشود)

مثال ۲- دستگاه دو معجزی دو مجهولی:

$$\text{را حل کنید} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -2x + 5y = -8 \end{cases}$$

برای پیدا کردن یک بهنجری یک مجهولی بر حسب y باید مجهول x را حذف کرد در اینجا دو طرف بهنجری اول را در ۲ و دو طرف بهنجری دوم را در ۳ ضرب میکنیم این دستگاه حاصل میشود

$$\begin{cases} 6x - 4y = 2 \\ -6x + 15y = -24 \end{cases}$$

حال چون این دو بهنجری را با هم جمع کنیم بهنجری یک مجهولی $11y = -22$ بدست میآید که جواب آن $y = -2$ است چون بجای y در بهنجری اول ۲- قرار دهیم بهنجری یک مجهولی $3x + 4 = 1$ پیدا میشود که جواب آن $x = -1$ است عدد های ۱- و ۲- جواب دستگاه بالاست ازین دو مثال این قاعده بدست میآید:

۶۶- قاعده اول - نخست جمله های متشابه دو طرف را جمع میکنیم بطوریکه هر مجهول در هر بهنجری در یک جمله باشد تا دستگاه دو بهنجری و مجهولی

$$\text{بصورت کلی} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

در آید

پس از آن برای حل این دستگاه باید در صورت لزوم هر یک از دو معجزی
 دستگاه را در عددی مناسب ضرب کنیم تا قدر مطلق ضریبهای یکی از مجهولها
 (مجهول را که میخواهیم حذف کنیم) در دو معجزی مساوی شود. پس از آن
 اگر این دو ضریب دارای یک نشانه باشند دو معجزی حاصل را از هم
 کم میکنیم و اگر نه آنها را با هم جمع میکنیم تا یک معجزی یک مجهولی
 (بر حسب مجهول دیگر) بدست آید. چون این معجزی یک مجهول را
 حل کنیم یک مجهول پیدا می شود و از روی آن مجهول دیگر بدست می آید.
 بنظره - ممکن است که مجهول دوم را نیز بوسیله حذف مجهول اول بدست آورده
 و در نتیجه بخوابیم فقط یکی از دو مجهول را باین قاعده حذف کنیم بهتر است مجهول را حذف
 کنیم که مساوی کردن ضریبهایش آسانتر باشد.
 مثال - میخواهیم دستگاه

$$(1) \begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = c \end{cases} \quad \text{را که بصورت کلی}$$

است از روی این قاعده حل کنیم

حل - برای پیدا کردن x مجهول y را حذف میکنیم. کافیهست دو
 طرف معجزی اول را در b ضرب y در معجزی دوم، و دو طرف معجزی دوم را

درجه (ضریب مجهول x درجه چندی اول) ضرب کنیم این دستگاه بدست میاید

$$\begin{cases} abx + cb'y = cb' \\ a'bx + cb'y = cb' \end{cases}$$

چون ضریب x در هر دو چندی این دستگاه یکسان است از هر دو کم میکنیم این

$$abx - a'bx = cb' - cb' \quad \text{بچندی پیدا میشود}$$

$$ab - a'b \neq 0 \quad \text{و یا} \quad (ab - a'b)x = cb' - cb' \quad \text{که بفرض}$$

$$x = \frac{cb' - cb'}{ab - a'b} \quad \text{جواب } x \text{ چنین میشود}$$

اگر بجای x در یکی از دو چندی جواب x را قرار دهیم و یا این که x را در

دو چندی دستگاه حذف کنیم یک چندی یکت مجهولی بر حسب y بدست

$$\text{میاید که از حل آن} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \quad \text{پس جواب دستگاه (۱) چنین است}$$

$$(۲) \quad \begin{cases} x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\ y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \end{cases}$$

متصوره - برای مساوی کردن ضریبهای یکت مجهول چنانکه در مثال بالا دیدیم

قاعده است که دو طرف چندی اول را در ضریبی که آن مجهول در چندی دوم دارد

و دو طرف چندی دوم را در ضریب آن مجهول در چندی اول ضرب کنیم ولی برای

ساد شدن عمل بهتر است که من ضریبهای آن مجهول کوچترین مضرب پیدا نموده

دو طرف بر بچندی را در برابر این کوچکترین مضرب برضرب آن مجهول در آن بچندی ضرب کنیم.

مثلاً میخواهیم x را در این دستگاه حذف

$$\begin{cases} 3x - 18y = 1 \\ \frac{1}{3}x + 2.4y = 5 \end{cases}$$

کنیم کوچکترین مضرب ضریبهای x (عددهای ۱۸ و ۲۴) ۷۲ است.
براین دو طرف بچندی اول را در $\frac{72}{18} = 4$ و دو طرف بچندی دوم را در $\frac{72}{24} = 3$ ضرب میکنیم این دستگاه پیدا میشود:

$$\begin{cases} 12x - 72y = 4 \\ 2x + 72y = 15 \end{cases} \quad \text{که ضریبهای } y \text{ در دو بچند آن مساویست:}$$

تمرین

اول برای حل دستگاههای زیر بقا عدد اول معلوم کنید آیا که امکنیت از دو مجهول را

حذف کنیم بهتر است؟

ثانیاً هر یک را بقا عدد بالا حل کنید

$$\begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{3} \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = \frac{y}{5} \\ 2x + y = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5y = 1,5 \\ 2x + 4y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 2x - y = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 11,5 \\ 2x - 5y = -1,2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + 10n = 2\frac{1}{7} \\ 2m - 5n = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t + 5u = 2 \\ t - u = 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{7}a - \frac{1}{7}b = 1 \\ \frac{1}{7}a + \frac{2}{7}b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r - 2q = \frac{2}{7} \\ 4r - 6q = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,5r - 2q = 1,5 \\ 2r + 5q = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,5x - 2,5y = -9,5 \\ 10x + 12y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{7}t + \frac{2}{7}u = 7\frac{5}{7} \\ \frac{2}{7}t - 2u = -11\frac{1}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x + y) + 2y = 9 \\ 2(x + y) = 2 + 6y \end{cases}$$

ممکن است $x + y$ را در بجهت بهای این دستگاه حذف نمود

قاعده دوم

مثال ۱- این دستگاه دو مجهولی

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$$

حل کنید.

حل - می‌توانیم یک معادله را از این دستگاه بدست آوریم بدین ترتیب که مثلاً x را از معادله اول بحسب y پیدا می‌کنیم: $x = 1 - 3y$ (۱)
و $1 - 3y$ را بجای x در معادله دوم می‌گذاریم این معادله یک مجهولی پیدا می‌شود:

$$2(1 - 3y) - y = -5$$

و یا $-7y = -7$ و یا $y = 1$
اگر ۱ را بجای y در معادله (۱) بگذاریم x پیدا می‌شود:

$$x = 1 - 3 \times 1 = -2$$

ممکن بود که y را بر حسب x در یکی از دو معادله دستگاه پیدا نموده در معادله دیگر ببریم تا یک معادله یک مجهولی بر حسب x بدست آید.
از این مثال قاعده دیگری برای حل دستگاه دو مجهولی بدست می‌آید:
۶-۷- قاعده دوم - پس از آنکه دستگاه را بصورت کلی

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

در آوریم از یکی از دو پنجه مجهولی را (مثلاً x) بحسب مجهول دیگر (مثلاً y) پیدا کرده در پنجه دی دیگر بجای آن مجهول (یعنی x) میگذاریم تا یک پنجه دی یک مجهولی بر حسب مجهول دیگر (یعنی y) بدست آید .
از حل این پنجه دی مجهول دیگر (یعنی y) پیدا و از روی آن مجهول اول حساب میشود
یاد آوری - برای حل یک دستگاه باین قاعده بهتر است مجهولی را از میان
بریم که ضریبش ساده تر از ضریبهای دیگر باشد .

مثال - دستگاه
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
 را بقاعده دوم حل کنید

حل - از یکی از دو پنجه دی دستگاه مثلاً از پنجه دی اول x کی از دو مجهول مثلاً x را

اگر $a \neq 0$ باشد بر حسب y پیدا می کنیم $x = \frac{c - by}{a}$ (۱)

و این مقدار را بجای x در پنجه دی دوم دستگاه میگذاریم این پنجه دی یک مجهولی

بدست می آید :
$$a'x \frac{c - by}{a} + b'y = c'$$

و یا
$$a'c - \frac{a'b'y}{a} + ab'y = a'c'$$
 و یا

$$a'c - \frac{a'b'y}{a} + ab'y = a'c'$$
 که بفرض $a'a - b'b \neq 0$ جواب

محیطین میشود
$$y = \frac{a'c - ca'}{a'a - b'b}$$
 پس که چون در پنجه دی (۱) بجای y

مساویش را قرار دهیم جواب x بدست می آید :

$$x = \frac{c - b \frac{ca' - ca}{ab' - ba}}{a} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba}$$

تمرین

اولاً در دستگاه‌های زیر که ام‌مجهول باین قاعده حذف شود تا حل دستگاه آسان‌تر شود
ثانیاً هر یک از دستگاه‌های زیر را با قاعده دوم حل کنید.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y - 2x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - \frac{1}{4}b = -1 \\ b = \frac{a}{4} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,5x - y = 1,5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m - \frac{1}{3}n = -1 \\ 4m + 2n = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}u - \frac{1}{4}v = 0 \\ \frac{5}{6}u - \frac{7}{4}v = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1,5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 59 - 4x = 0 \\ 29 = 1x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 1 \\ y - 3x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 1,5y = -2,5 \\ 1,5x - 2y = 1 \end{cases}$$

• قاعده سوم

مثال - دستگاه دوپنجذی دو مجهولی

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + 2y = 12 \end{cases}$$

حل کنید.

حل - در دوپنجذی دستگاه یک مجهول (مثلاً x) را بر حسب مجهول دیگر پیدا

میکنیم از پنجذی اول $x = \frac{1+3y}{2}$ و از پنجذی دوم

$x = \frac{12-2y}{5}$ چون جواب x در دوپنجذی یکی است بنابراین

از مقایسه این دو مقدار x یک پنجذی یک مجهولی بر حسب y بدست میآید:

$$\frac{1+3y}{2} = \frac{12-2y}{5}$$

از حل آن جواب y چنین است $y = 1$ و از آنجا جواب x چنین

$$x = \frac{1+3 \times 1}{2} = 2$$

میشود:

ازین مثال این قاعده بدست میآید:

۶۸- قاعده سوم - پس از تبدیل دستگاه بصورت کلی

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

در پنجذیهای دستگاه یک مجهول (مثلاً x) را بر حسب مجهول دیگر (یعنی y)

پیدا میکنیم و چون دو عبارتیکه بدست میآیند باهم مساویند از تساوی آنها یک بهچندی یک مجهولی بر حسب مجهول دیگر (یعنی y) تسکیل میشود و از حل آن جواب مجهول (یعنی y) بدست میآید و از روی آن مجهول دیگر (یعنی x) حساب میشود.

مثال - دستگاه دو مجهولی

$$\text{رابطه این قاعده} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

حل کنید

حل - x را در هر بهچندی بر حسب y پیدا می کنیم و بهچندی اول

$$x = \frac{c' - b'y}{a} \quad \text{و در بهچندی دوم} \quad x = \frac{c - by}{a}$$

از مقایسه دو مقدار x این بهچندی یک مجهولی بدست میآید

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'}$$

که از حل آن جواب y چنین میشود

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

و از روی

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

آن جواب x بدست میآید

تمرین

این دستگاه را بقاعده سوم حل کنید:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 2.5 \\ 2a - b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2.5a - 1.5b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m - \frac{1}{2}n = 1 \\ n - \frac{1}{2}m = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = \frac{1}{2}x + 1 \\ 2y - 1 = x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} \\ x = 2y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = \frac{1+9}{2} \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$m - n = 2$$

$$\begin{cases} 2m - n + 1 = \frac{m-n}{2} \end{cases}$$

۶۹- دستورهای کرامر- چنانکه دیدیم جواب دستگاه

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

دوای دستورهای زیرین سوم بدستورهای کرامر بدست میآید:

$$(دستورهای کرامر) \begin{cases} x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \\ y = \frac{ac' - ca'}{ab' - a'b} \end{cases}$$

می‌توان از روی دین دستورهای دستگاه دو به چندی و مجهولی را حل نمود بدین طریق که اول آن دستگاه را بصورت دستگاه کُلی بالا درآورده (یعنی بقسمی که جمله‌های مجهول بیک طرف و معلوم بطرف دیگر برده شود و در دو به چندی x و y نیز برسم نوشته شود) بعد دین دستورهای بجای ضربهای a و b و c و d مقدارهای نظیر هر یک را قرار داده جواب مجهول را حساب کنیم

مثال - دستگاه

$$\begin{cases} 5(x+2) - 23 = 3(y+1) \\ 3(x-2) + 5(y-1) = 19 \end{cases} \quad \text{را از}$$

روی دستورهای کرامر حل کنید
نخست این دستگاه را ساده می‌کنیم تا با این صورت درآید:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 16 \\ 3x + 5y = 30 \end{cases}$$

پس از آن در دستورهای کرامر بجای ضربهای مقدارهای نظیرشان را قرار می‌دهیم
تا جواب x و y بدست آید:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} = \frac{16 \times 5 - (-3) \times 30}{5 \times 5 - (-3) \times 3} = \frac{10 + 90}{25 + 9} = \frac{100}{34} = 5$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - a'b} = \frac{5 \times 30 - 16 \times 3}{5 \times 5 - (-3) \times 3} = \frac{150 - 48}{25 + 9} = \frac{102}{34} = 3$$

توضیح - دستورهای کرامر را که بصورت برده هستند می‌توان چنین بنحاطر سپرد:

x و y هر دو دارای یک برضه نام میباشند که از ضریبهای مجهولها تشکیل شده است باین ترتیب که ضریب x پنجمی اول را در ضریب y پنجمی دوم همچنین ضریب y پنجمی اول را در ضریب x پنجمی دوم ضرب میکنیم و دو حاصل ضرب را از هم کم میکنیم این تفاضل همان برضه نام x و y است

($ca' - cb'$ یا $cb' - ca'$) و برای تعیین برضه شمار مجهول کافیت که در برضه نام بجای ضریبهای آن مجهول مقدار معلوم نظیر آنرا بگذاریم مثلاً اگر برضه نام را $ca - cb$ بگیریم برضه شمار x این طور بدست میآید که درین عبارت بجای a و c به ترتیب c و c' را بگذاریم تا $cb' - ca'$ بدست آید

$$x = \frac{cb' - ca'}{cb' - ca'} = \frac{cb' - ca'}{cb' - ca'}$$

پس

$$y = \frac{ca' - cb'}{cb' - ca'} = \frac{ca' - cb'}{cb' - ca'}$$

و همچنین

تنبیه - واضح است که هر دستگاه دو پنجمی دو مجهولی را میتوان از روی هر یک از قاعده های بالا حل کرد ولی عموماً از روی یکی ازین قاعده ها زودتر جواب بدست میآید . با دانش آموز است که در حل هر دستگاه قاعده آسانرا بکاربرد.

تمرین

۱- هر یک از دستگاههای زیر را هر سه قاعده دو پنجمی از روی تنهایی که مایل کنید

$$\begin{cases} x + 4y = 27 \\ 2x + 5y = 52 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 3y = 100 \\ 3x - y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + 5b = 1 \\ 6a + 7b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x - 15y = -20 \\ 2x - 3y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 6y = 6 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 11b = -9 \\ a - 3b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5m - 4n = 6 \\ 1m - 7n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 7y = 17 \\ 7x - 5y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 3y - 2 = 0 \\ 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21x + 1y + 66 = 0 \\ 22y - 21x + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10a + 7b + 4 = 0 \\ 6a + 5b + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 19 \\ y = 3x - 27 \end{cases}$$

۲- اولاً معلوم کنید که هر یک از دستگاه‌های زیر از روی کدام قاعده آسان‌تر

حل می‌شود.

ثانیاً از روی آن قاعده آن دستگاه را حل کنید.

$$(۲) \begin{cases} \frac{2}{3}x - 2y = 1 \\ \frac{1}{3}x - y = 0 \end{cases}$$

$$(۱) \begin{cases} \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}y + 1 \\ \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}y - 1 \end{cases}$$

(درین دو مثال بهتر است که برخاسته‌ها را ازین بریم زیرا چون دو طرف بمعنی اول دستگاه (۱) را بر ۳ تقسیم کنیم در دو بمعنی دوم دستگاه x بهولت حذف میشود و همچنین اگر دو طرف بمعنی دوم دستگاه (۲) را در ۳ ضرب کنیم y بهولت حذف میشود.)

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 17 \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 19 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\frac{1}{3}x = 2\frac{1}{3}y + 4 \\ 2\frac{1}{3}y = 2\frac{1}{3}x - 47 \end{cases}$$

(درین دستگاه بهتر است که نخست برخاسته‌ها را ازین بسیم)

$$\begin{cases} 5x - 4,9y = 1 \\ 2x - 2,9y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 4y + 1 = 0 \\ 1,7x - 2,9y + 0,5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,7x + 2,6y = 2,1 \\ 0,9x + 1,2y = 0,2 \end{cases} \quad \begin{cases} 27,4x - 26,5y = 11 \\ 27,4x - 26,5y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,6x - 2,41y - 2,222 + 2\frac{1}{3}x = 0 \\ 2,51x - 2,6y + 2,222 - \frac{1}{3}y = 2,208 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(x+2) - 2(y+1) = 22 \\ 2(x-2) + 2(y-1) = 19 \end{cases}$$

-۱۴۳-

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}(y+1) = 1 \\ \frac{1}{4}(x+1) + \frac{3}{4}(y-1) = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}(y+1) = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{4}y = 9\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{x+2y} = \frac{7}{2x+y} \\ \frac{7}{2x-2} = \frac{5}{6-y} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2x+1} = \frac{2}{5y+4} \\ \frac{1}{4x-3} = \frac{2}{7y-6} \end{cases}$$

(درین دودستگاه چون طرف دوم هر یک پهنه‌ی رابط اول بریم و طرف اول را بیک طرف تبدیل کنیم)

چون طرف دوم صفراست کافی است برضشار این برض را مساوی صفر قرار دهیم برای اینکه باین نتیجه برسیم
بتراین است که از اول دو طرف هر یک پهنه برادر کو چقدرین مضرب برضها مضرب کنیم)

$$\begin{cases} \frac{x+2y}{x-y} = 8 \\ \frac{7x-13}{2y-5} = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{15x+1}{45-y} = 8 \\ \frac{12y+19}{x-10} = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+2y+1}{2x-y+1} = 2 \\ \frac{2x-y+1}{x-y+2} = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{27x-27y+73}{13x-15y+17} = 22 \\ \frac{12x-22y+19}{13x-15y+17} = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x-2y}{5} - 1 = 4x + \frac{2x-2y}{2} \\ 10x + \frac{2x+5y}{3} = 9 + \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x-y+2}{3} - \frac{x-2y+2}{3} = 4 \\ \frac{2x-4y+2}{4} + \frac{4x-2y-9}{3} = 4 \end{cases}$$

$$(x+y):(y+1):(x-y) = 3:2:5$$

این تساوی یک دستگاه دوپنجذی دو مجهولی است ازتقرار:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{y+1} = \frac{3}{4} \\ \frac{y+1}{x-y} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$(x-2):(y+1):(x+y-2)=3:4:5$$

$$\begin{cases} (x-4)(y+7)=(x-2)(y+4) \\ (x+5)(y-2)=(x+2)(y-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-1)(3y+1)=6(x+2)(y-2) \\ 4(2x+2)(y+1)=(4x-1)(3y+3) \end{cases}$$

۲- دستگاههای تبدیل پذیر

۷۰- بسیاری از دستگاه پنجذی های دو مجهولی پس از ساده کردن از

بین بردن برته ناماد جمع جمله های مشابه از درجه های غیر اول میشوند ولی بسا

اتفاق می افتد که براد ساده ای حل بعضی از آنها را بجل یک یا چند دستگاه

دوپنجذی دو مجهولی درجه اول تبدیل نمود.

مثال ۱- دستگاه دوپنجذی دو مجهولی

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{7}{y} = 3 \end{cases}$$

را حل کنید

حل - چون برخه نامهار از پین بریم باین دستگاه دو مجهولی درجه دوم میسزم

$$\begin{cases} 4y - 3x = xy \\ 2y + 9x = 4xy \end{cases}$$

ولی اگر $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ را مجهول بگیریم و آنها را به x و y بنماییم

یعنی $\begin{cases} \frac{1}{x} = X \\ \frac{1}{y} = Y \end{cases}$ دستگاه (۱) بصورت ساده

$$\begin{cases} 4X - 3Y = 1 \\ 2X + 9Y = 4 \end{cases}$$

میشود که نسبت به X و Y دستگاهی از درجه اول است که چون آنرا بسکلی از قاعده

پیش حل کنیم X و Y پیدا میشود $X = 1$ $Y = \frac{1}{3}$

یعنی $\begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$

پس $x = 1$ و $y = 3$

تبصره - بعلی اگر دستگاهی بصورت

$$\begin{cases} ay + bx = cxy \\ ay + bx = cxy \end{cases} \text{ باشد}$$

از تقسیم دو طرف بر xy به دست می آید
(۱) است بدست می آید

$$\begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c \\ \frac{a}{x} + \frac{b'}{y} = c' \end{cases}$$

که چون مانند مثال پیش آنرا حل کنیم چنین خواهیم داشت

$$X = \frac{1}{x} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

پس

$$X = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

مثال ۲- دستگاه دو مجهولی زیر را حل کنید

$$(1) \begin{cases} \frac{3}{x+y} - \frac{1}{2x-y} = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{x+y} + \frac{3}{2x-y} = 1\frac{2}{3} \end{cases}$$

چون برخه ها را از میان ببریم به چندیهایی درجه دوم بدست می آید

ولی اگر $\frac{1}{x+y}$ را u و $\frac{1}{2x-y}$ را v بنامیم یعنی

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{x+y} = u \\ \frac{1}{2x-y} = v \end{cases}$$

u و v نیز مثل x و y مجهولند برای پیدا کردن آنها با در نظر گرفتن دستگاه
(۲) دستگاه (۱) را میتوان چنین نوشت

$$(۳) \quad \begin{cases} ۳u - v = \frac{۲}{۳} \\ ۲u + ۳v = \frac{۵}{۳} \end{cases}$$

از حل این دستگاه u و v بدست میآید $u = \frac{۱}{۳}$ و $v = \frac{۱}{۳}$ که چون
بجای u و v در دستگاه (۲) مساویات را قرار دهیم دستگاه

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2x-y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

بدست میآید که چون آن را ساده کنیم به یک دستگاه دو مجهولی درجه اول تبدیل
میشود و از حل آن جواب دستگاه (۱) بدست میآید $x = ۲$ و $y = ۱$
مثال ۳- دستگاه دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$(۱) \quad \begin{cases} ۹y - ۱۶x = ۱۷ \\ ۴\sqrt{x} - ۳\sqrt{y} = -۱ \end{cases}$$

طرف چپ معادله اول دستگاه بر طرف چپ معادله دوم دستگاه بخش پذیر است
زیرا دستگاه (۱) را میتوان چنین نوشت

$$(۲) \quad \begin{cases} (۳\sqrt{y} - ۴\sqrt{x})(۳\sqrt{y} + ۴\sqrt{x}) = ۱۷ \\ ۴\sqrt{x} - ۳\sqrt{y} = -۱ \end{cases}$$

چون در یکنجای اول دستگاه (۲) بجای $۴\sqrt{x} - ۳\sqrt{y}$ مساوی ۱- را قرار دهیم دستگاه (۲) چنین میشود

$$(۳) \quad \begin{cases} ۴\sqrt{x} + ۳\sqrt{y} = ۱۷ \\ ۴\sqrt{x} - ۳\sqrt{y} = -۱ \end{cases}$$

اگر جمع و تفریق این دو یکنجای این دستگاه پیدا میشود

$$\begin{cases} \sqrt{x} = ۲ \\ \sqrt{y} = ۳ \end{cases} \quad \text{و یا} \quad \begin{cases} ۸\sqrt{x} = ۱۶ \\ ۶\sqrt{y} = ۱۸ \end{cases}$$

و چون دو طرف این دو یکنجای را بتوان دوم برسانیم x و y بدست میآید

$$y = ۹ \quad \text{و} \quad x = ۴$$

تمرین

دستگاه بهای دو یکنجای زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{۳}{x} + \frac{۱}{y} = ۳ \\ \frac{۱۵}{x} - \frac{۴}{y} = ۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱۷x - \frac{۵۴}{y} = ۳ \\ ۱۶x - \frac{۳۴}{y} = ۱۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-3} = 7 \\ \frac{5}{x-2} - \frac{4}{y-3} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5x}{27} + \frac{2}{y} = 6 \\ \frac{10x}{27} + \frac{2}{y} = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4x}{3x-2y+1} - \frac{2y}{x+y-1} = 2 \\ \frac{x}{3x-2y+1} + \frac{2y}{x+y-1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 6 \\ 2\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sqrt{x+5} - 3\sqrt{y-2} = 3 \\ 3\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-2} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 11 \\ 4x - 9y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{y}} = 4 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{3}{\sqrt{y+3}} = 1 \\ \frac{4}{\sqrt{x-3}} + \frac{9}{\sqrt{y+3}} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-2)(5y+1) = (5x-1)(y+2) \\ (3x-1)(y+5) = (x+5)(7y-1) \end{cases}$$

۳- بحث دستگاههای دو مجهولی درجه اول

۷۱- بحث دستگاه دو مجهولی درجه اول تحقیق در وجود جواب آن دستگاه است

بهمانطور که پیش برای یک پیچیدگی یک مجهولی عمل کردیم اینک بحث چند مثال میزنیم

مثال ۱- این دستگاه را حل کنید

$$(A) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 6y = 2 \end{cases}$$

x را از پنجمی اول بر حسب y بدست می‌آوریم $(1) \quad x = \frac{1+3y}{2}$

و آن را در پنجمی دوم بجای x قرار می‌دهیم چنین می‌شود

$$4x - 6y = 2 \quad \text{و یا} \quad 4x - 6y = 2$$

$2 - 6y - 6y = 2$ درین پنجمی یک مجهولی ضریب y و مقدار معلوم هر دو

صفر است یعنی $0 = 0$ پس بموجب (شماره ۴۶) y دارای جوابی

بی‌شمار است و باز، هر مقداری از y جوابی برای x از پنجمی (۱) بدست می‌آید

پس دستگاه (A) دارای جوابهای بی‌شمار است.

مستقیماً هم می‌توانستیم این مطلب را پیش منی کنیم زیرا پنجمی دوم دستگاه (A)

همان پنجمی اول دستگاه است که ضریبهایش در یک عدد (عدد ۲) ضرب

شد پس در حقیقت این دستگاه شامل یک پنجمی دو مجهولی است و چنانکه

میدانیم (شماره ۵۶) یک پنجمی درجه اول دو مجهولی جوابهای بی‌شمار دارد و برای

بدست آوردن آن جوابها می‌توان بجای یکی از دو مجهول عددی اختیاری گذاشت

مجهول دیگر را حساب نمود بنا بر این ازین مثال چنین بر می‌آید که:

این دو تساوی برقرار باشد
$$\begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = c \end{cases}$$

یعنی ضریبهای هر مجهول در دو معادله یکی است
 به چندی خودش تبدیل میشود و بنا بر این دارای جوابهای بی شمار است
 مثال ۲- این دستگاه دو مجهولی را حل کنید

$$(B) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 1 \end{cases}$$

برای حل دستگاه x را حذف میکنیم بدین طریق که دو طرف معادله اول را در $\frac{3}{1}$ ضرب نماییم تا دستگاه چنین شود

$$(1) \begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ 3x - 6y = 1 \end{cases}$$

از تفریق این دو معادله $0 = 8$ که نشدنت
 پس معلوم میشود خود دستگاه ناسازگار است یعنی نمیتوان دو عدد پیدا کرد
 که چون بجای مجهولهای دستگاه گذاشته شود دو تساوی بدست آید
 ملاحظه میکنیم که سبب حذف شدن 0 تناسب بودن ضریبهای دو مجهول (x و

(۷) در دو همبندی است و علت نداشتن اینست که جمله های معلوم دو همبندی
متناسب با ضریبهای مجهولهای دو همبندی نبوده است پس باین نتیجه میرسیم:
۷۳- هرگاه در دستگاه دو همبندی دو مجهولی

$$\begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = c \end{cases}$$

باشد یعنی نسبت میان ضریبهای $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
 x و y یکی بوده و مخالف نسبت بین دو معلوم باشد دستگاه ناشدنی
بوده و دارای جواب نیست

تبصره- از روی دستگاه (۱) که هم ارز دستگاه (۲) است بجوابی می رسیم
که دستگاه (۲) ناشدنیست زیرا نمیشود یکدفعه $3x - 6y$ برابر ۹ و یکدفعه
برابر ۱ باشد

خلاصه بحث بالا را میتوان چنین نوشت:

۷۴- حالت اول- هرگاه در دستگاه دو همبندی دو مجهولی

$$(۱) \begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = c \end{cases}$$

ضریبهای مجهول نظیر بنظیر متناسب با معلومها باشد

یعنی $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (۲)
 دستگاه مبهم است یعنی دستگاه در حقیقت دارای یک همبندی است و بنا بر این جوابی
 بسیار دارد.

حالت دوم - اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ (۳)
 باشد دستگاه جواب ندارد.

حالت سوم - در غیر این دو حالت یعنی وقتی که $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ (۴)
 باشد دستگاه دارای یک جواب معین است

$$(۵) \begin{cases} x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\ y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \end{cases}$$

تبصره - نتیجه بحث بالا را از روی عبارت جوابها نیز میتوان بدست آورد

بدین طریق:

اگر دستگاه (۱) دارای جواب باشد جواب آن بصورت (۵) است درستی

دستگاه (۱) دارای یک جواب معین است که برخه نام $ab' - ba' \neq 0$

باشد که از آن نتیجه میشود $ab' \neq ba'$ و یا $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

حال اگر $ab' - ba' = 0$ باشد و مثلاً $ac' - ca' \neq 0$ باشد

یعنی $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ ولی $\frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد دستگاه ناشدنی

(درین حالت $ca' - ac' = 0$ نیز مخالف صفر است . چرا ؟)

بالاخره اگر $ca' - ac' = 0$ و مثلاً $ac' - ca' = 0$ نیز برابر صفر باشد

یعنی $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ و دستگاه دارای جوابهای شمار است

(درین حالت $ca' - ac' = 0$ نیز صفر است . چرا ؟)

مثال ۱- دستگاه دوپنجندی دو مجهولی

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x + y = \lambda + 4 \\ (\lambda + 4)x + (3\lambda + 2)y = 8 - 2\lambda \end{cases}$$

را حل نموده و درازا مقدارهای مختلف λ در وجود جواب آن بحث کنید

اگر $ca' - ac' = 0$ یعنی $3\lambda(1 - \lambda)$ مخالف صفر باشد (یعنی λ

نه صفر باشد و نه ۱) درین صورت دستگاه دارای یک جواب معین است

$$x = \frac{\lambda + 2}{1 - \lambda} \quad \text{و} \quad y = \frac{2(\lambda - 5)}{1 - \lambda}$$

در حالتیکه $\lambda = 0$ یا $\lambda = 1$ باشد $ca' - ac' = 0$ مساوی

صفر میشود

حالت اول $\lambda = 0$ درین صورت $ca' - ac' = 0$ نیز صفر میشود و دستگاه

چنین میشود

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

یعنی ضریبهای هر مجهول و مقدارهای معلوم متناسبند درین حالت دستگاه دارای جوابهای متناهی است

حالت دوم $\lambda = 1$ درین حالت $ac' - ca'$ مخالف صفر است و دستگاه بصورت نامشده

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 5x + 5y = 1 \end{cases}$$

درمیآید که دارای جواب نیست.

مثال ۲- بجای α و β چه عددی بگذاریم تا این دستگاه مبهم شود؟

$$(1) \quad \begin{cases} (\alpha - \beta)x + (3\alpha - 5)y = 2\alpha\beta \\ (\alpha + \beta)x + (\beta - 7)y = 6\alpha\beta \end{cases}$$

برای اینکه دستگاه مبهم شود باید $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد و یا

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{3\alpha - 5}{\beta - 7} = \frac{2\alpha\beta}{6\alpha\beta} = \frac{1}{3}$$

ازین تساوی یک دستگاه دو معادله دو مجهولی بر حسب α و β بدست میآید

$$\begin{cases} \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{1}{3} \\ \frac{3\alpha - 5}{\beta - 7} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

جواب این دستگاه چنین است $\alpha = \frac{16}{17}$ و $\beta = \frac{8}{17}$ که بازاء

آنها دستگاه (۱) مبهم و باینصورت میشود

$$\begin{cases} \frac{1}{17}x - \frac{27}{17}y = (\frac{16}{17})^2 \\ \frac{23}{17}x - \frac{11}{17}y = 2(\frac{16}{17})^2 \end{cases}$$

پرسش های شفاهی

۱- اولاً پیش از حل معلوم کنید کدام یک از دستگاه های زیر مبهم و کدام یک ناشدنی

و کدام یک دارای یک جواب معینی است

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x = 4 - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 1 = y \\ 2y = 3x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = x + 1 \\ 3y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2 - x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x - 2y = -1 \end{cases}$$

ثانیاً از روی خن بریک نیز در وجود جواب آنها تحقیق کنید .

۲- یک دستگاه مبهم و یک دستگاه ناشدنی درست کنید .

۳- چندی دو نام این دستگاه را در بنویسید بطوریکه دستگاهها ناشدنی باشند یا

انفیکه کنید که دستگاهها مبهم باشند یا بریک دارای یک جواب معینی باشند .

$$\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad \begin{cases} a - 2 = b \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3m - 2n = 5 \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 + 5b \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 2 - 2x \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

تمرین

۱- دستگاه‌های دو مجهولی زیر را حل و بحث کنید:

$$\begin{cases} ax + by = a^2 + ab \\ x + y = 2a \end{cases} \quad \begin{cases} 2bx - ay = ab \\ bx + 2ay = 2ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x - a) = b(y - a) \\ b(x + b) = a(y + b) \end{cases} \quad \begin{cases} cx + dy = c^2 + cd \\ dx + cy = cd + d^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by = a^2 + 2ab + b^2 \\ bx + ay = a^2 + 2ab + b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by = 2a \\ x + y = \frac{a^2 + b^2}{ab} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2 \\ ax + b^2 = a^2 + by \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c \\ \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = c' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-a}{2} + \frac{y-b}{2} = a \\ \frac{x-b}{2} + \frac{y-a}{2} = b \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b} \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-b)x + (a+b)y = a+b \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^2+b^2)(x-1) = ab(2x-y) \\ 2x = y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} bx = ay \\ \frac{a}{x} = c + \frac{b}{y} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b} \\ \frac{x}{y} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$\frac{2x-b}{a} = \frac{2y+a}{b} = \frac{2x+y}{a+2b}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+m}{2m} + \frac{1}{2} \\ x = \frac{y+m}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+1}{y-1} = \frac{a+b}{a-b} \\ \frac{x-1}{y+1} = \frac{a-b}{a+b} \end{cases}$$

۲- اولاً ثابت کنید که این دستگاه همیشه دارای یک جواب معین است هر چه باشد

مقدار m

$$\begin{cases} mx - 2y = 2 \\ 2x + my = -25 \end{cases}$$

بنابراین عددی بجای m بگذاریم تا x مساوی y شود.

۳- در دستگاه زیر بجای α عددی بگذارید تا x و y بر نسبت $\frac{3}{1}$ باشند

$$\begin{cases} (\alpha - 1)x - 2y = 12 \\ 4\alpha x + (3\alpha + 2)y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha + 2)x + (1 + 5\alpha)y = 15 & \text{۴- در دستگاه} \\ (5 - 2\alpha)x + (1 - 10\alpha)y = 9 \end{cases}$$

چه عددی بجای α گذاریم تا رابطه زیر برین ریشه مابرقرار باشد:

$$x + y = -6$$

$$\begin{cases} \alpha x - 6y = 5\alpha - 2 & \text{۵- درین دستگاه} \\ 2x + (\alpha - 7)y = -7\alpha + 29 \end{cases}$$

α را طوری پیدا کنید که دستگاه بهم شود و یا نانشدنی گردد و یا جواب x با y مساوی شود

راه‌سنائی- برای اینکه دستگاه بهم یا متنفع باشد باید $\frac{\alpha}{1} = \frac{-6}{\alpha-7}$ باشد

پس از ساده کردن $\alpha^2 - 7\alpha + 12 = 0$ و یا موافق (شاره ۱۲۲ تجزیه کتاب اول)

بصورت $(\alpha - 4)(\alpha - 3) = 0$ میشود که اگر $\alpha = 3$ باشد دستگاه بهم و اگر

$\alpha = 4$ باشد دستگاه نانشدنی میشود

$$\begin{cases} 2x - 7y = 1 & \text{۶- در دستگاه} \\ (3 + \alpha)x + (4 + 10\alpha)y = 2 \end{cases}$$

۴ و ۵ را طوری پیدا کنید که دستگاه بهم یاناشدنی باشد

$$\begin{cases} ۷-دستگاه & ax - (b-1)y + 1 = 0 \\ & ۲x + ۳y + ۲ = 0 \end{cases}$$

بجای ۵ و ۷ چه عددانی گذاریم تا دستگاه بهم یاناشدنی شود؟

$$\begin{cases} ۱-دستگاه & (3a - 5b + 5)x + (1a - 2b - 5)y = 1 \\ & (2a - 3b + 5)x + (4a - b)y = 2 \end{cases}$$

۴ و ۵ را بر حسب ۵ و ۷ طوری تعیین کنید که دستگاه بهم نشود

۴- دستگاههای ۲ مجهولی درجه اول

۷۵- هرگاه مجهولهای x و y و z و غیره در چند معجزه درجه اول صدق کنند آن چند معجزه تشکیل یک دستگاه چند مجهولی درجه اول را میدهند مثلاً اگر

بین x و y و z این سه معجزه برقرار باشد

$$۲x - y + 3z = 1 \quad \text{و} \quad x - y = 2 \quad \text{و} \quad y + z = 5$$

این سه معجزه تشکیل یک دستگاه سه معجزه درجه اول را میدهند و آنرا چنین نویسند:

$$\begin{cases} ۲x - y + 3z = 1 \\ x - y = 2 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

همچنین است دستگاه دوپنجذی سه مجهولی

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 3 \\ x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

جواب یکدستگاه عددها یا عبارتها نیست که چون بجای مجهولهای نظیر خود
درپنجذیهای دستگاه قرار دهیم آن پنجذیها تساویهای عددی یا اتحادها تبدیل
شود

حل یکدستگاه پیدا کردن جواب آن دستگاه است

۷۶- قاعده کلی برای حل یکدستگاه سهپنجذی سه مجهولی درجه اول
نخست بهتر آنست که هر یک از پنجذیهای دستگاه را ساده کنیم پس
از آن یکی از مجهولها را بسکی از قاعده هائیکه پیش گفتیم (شماره های ۶۶-
۶۷ و ۶۸) درپنجذیهای دستگاه حذف کنیم مثلاً یک مجهول را از
یک پنجذی بر حسب مجهولهای دیگر پیدا کرده بجای خودش در دو پنجذی
دیگر گذاریم تا دو پنجذی دو مجهولی بدست آید. آن دستگاه دو مجهولی را
بسکی از قاعده هائیکه می دانیم حل می کنیم و مجهول سوّم را از روی آن
بدست می آوریم.

مثال ۱- دستگاه سهپنجذی سه مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 2y - 3z = -2 \\ x + 2y + 2z = 11 \end{cases}$$

حل - از دستگاه اول مثلاً x را پیدا میکنیم
(۱) $x = 2 + y - z$
و بجای x در دو معجزدی دیگر میگذاریم این دستگاه دو مجهولی پیدا میشود

$$\begin{cases} 2(2 + y - z) + 2y - 3z = -2 \\ (2 + y - z) + 2y + 2z = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y - 5z = -6 \\ 3y + z = 9 \end{cases} \quad \text{و یا}$$

از حل این دستگاه $y = 2$ و $z = 3$ و از روی معجزدی (۱) x بدست میآید
 $x = 2 + 2 - 3 = 1$

مثال ۲- دستگاه سه معجزدی سه مجهولی زیر را حل کنید:

$$(۱) \begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 2x - 3y + z = 5 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

حل - چون معجزدی اول یک معجزدی دو مجهولی است بر حسب x و y

کافی است که در دو همچندی دیگر x را حذف کنیم تا اینکه یک همچندی دیگر بر حسب x و y بدست آید. برای این کار کافی است دو همچندی دوم و سوم را با هم جمع کنیم تا دستگاهی بر حسب x و y بدست آید.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$$

از روی این دستگاه x و y پیدا میشود که چون در یکی از دو همچندی دوم یا سوم دستگاه (۱) بریم به دست میآید.

$$(1) \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x - 3y - 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 3 \end{cases} \quad \text{مثال ۳- این دستگاه را حل کنید}$$

حل - برای حذف یکی از مجهولها مثلاً x میتوان ضریب x را در دو همچندی اول و دوم و بعد در دو همچندی اول و سوم مساوی نمود بدین طریق که یکدفعه در هر همچندی اول را در ۳ و یکدفعه در ۲ ضرب نموده و همچندیهای دوم و سوم را بر حسب از آنها کم کنیم و همچندی حاصل تشکیل یک دستگاه دو مجهولی بر حسب y و z میدهند حذف x در دو همچندی اول و دوم:

$$\begin{cases} 3x - 6y + 3z = 0 \\ 3x - 3y - 2z = 1 \\ \hline -3y + 5z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + y - 5z = 3 \\ \hline -5y + 7z = -3 \end{cases}$$

حذف x در دو معادله اول و سوم:

دستگاه دو مجهولی بر حسب y و z

$$(2) \quad \begin{cases} -3y + 5z = -1 \\ -5y + 7z = -3 \end{cases}$$

که از حل این دستگاه y و z و از روی آنها x بدست میآید:

$$x = 3 \quad \text{و} \quad z = 1 \quad \text{و} \quad y = 2$$

۷۷- تبصره - اگر در مثال سوم x را بین دو معادله اول و دوم و سوم حذف

کنیم به معادله دو مجهولی $9y - 11z = 7$ (۳) میرسیم و جواب دستگاه

(۳)، یعنی $y = 2$ و $z = 1$ درین معادله نیز صدق میکند ازینجا

معلوم میشود که معادله (۳) را میتوان از دو معادله دیگر (۲) بدست آورد چنانکه

اگر معادله اول دستگاه (۲) را در ۲ و معادله دوم را در ۳- ضرب نمود و معادله را

جمع کنیم معادله (۳) بدست میآید پس معلوم میشود این معادله زایدی است

یعنی با داشتن دستگاه (۲)، حذف کردن x در دو معجزدی دوم و سوم لزومی ندارد بطور کلی اگر یک مجهول را در دو معجزدی A و B و همچنین همان مجهول را در دو معجزدی A و C حذف کردیم دیگر لازم نیست آن مجهول را در دو معجزدی B و C حذف نماییم.

برای اینکه معجزدی زیادی پیدا نشود برای حذف یک مجهول بهترین است که یکی از معجزدیهای دستگاه را در نظر گرفته ضریب آن مجهول را در آن معجزدی یک یک معجزدیهای دیگر مساوی نماییم (چنانکه ما در دستگاه مثال ۳ معجزدی اول را بترتیب با معجزدی دوم و بعد با معجزدی سوم در نظر گرفتیم).

تمرین

دستگاههای زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x + 2z = 11 \\ 2y + 4z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ 7x + 9z = 29 \\ y + 8z = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,2x - 1,9y = 1 \\ 1,7x - 1,1z = 2 \\ 2,9y - 2,1z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x - 2z = 4 \\ 5x = 4z \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{f}{x} &= x \lambda + \frac{g}{x} - \frac{g}{x} \\ 10 &= x \varphi + h \lambda - x \delta \\ 11 &= x \varphi + h - x \lambda \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \lambda - x \frac{1}{x} \lambda &= x + h \\ \lambda - h \frac{1}{x} \lambda &= x + x \\ \lambda + x \frac{1}{x} \lambda &= h + x \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 10 &= x \delta / \varphi + h \varphi / \varphi + x \delta / \varphi \\ 11 &= x \varphi / \varphi + h \lambda / \varphi + x \lambda / \varphi \\ 12 &= x \lambda / \varphi + h \lambda / \varphi + x \lambda / \varphi \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \varphi \varphi &= x \varphi + h + x \\ \varphi \delta &= x \lambda + h - x \lambda \\ \varphi \lambda &= x + h \lambda + x \lambda \end{aligned} \right\}$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (35) (36) (37) (38) (39) (40) (41) (42) (43) (44) (45) (46) (47) (48) (49) (50) (51) (52) (53) (54) (55) (56) (57) (58) (59) (60) (61) (62) (63) (64) (65) (66) (67) (68) (69) (70) (71) (72) (73) (74) (75) (76) (77) (78) (79) (80) (81) (82) (83) (84) (85) (86) (87) (88) (89) (90) (91) (92) (93) (94) (95) (96) (97) (98) (99) (100)

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= h + x \lambda + x \lambda \\ \delta &= x + x \lambda + h \lambda \\ \lambda &= x + h \lambda + x \lambda \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \varphi &= h \lambda + x - x \varphi \\ \delta &= x \lambda + x - h \varphi \\ \lambda &= x \lambda + h - x \varphi \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= x \lambda + h \lambda + x \lambda \\ \lambda &= x \lambda + h \lambda + x \lambda \\ \lambda &= x + h + x \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \lambda &= x \lambda + h \lambda + x \\ \lambda &= x \lambda + h \lambda + x \\ \lambda &= x + h + x \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda + x \lambda &= x \\ \lambda - x \lambda &= h \\ \lambda &= x + h + x \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x \lambda &= x \lambda \\ h \lambda &= x \lambda \\ \delta \lambda &= x + h + x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{r} - ry - z - r = \frac{z}{r} - ry - \frac{r}{r}z - y \\ x + y - \frac{1}{r} = rx - \frac{y}{r} + z \\ x - ry + rz = rz - r + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{y+1} = r \\ \frac{y+1}{z+1} = r \\ \frac{z+r}{x+1} = \frac{1}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{rx+y}{z+1} = r \\ \frac{ry+z}{x+1} = r \\ \frac{rz+x}{y+1} = r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{y-z} = 1 \\ \frac{x+z}{z+y} = r \\ \frac{y+z}{z-x} = -\frac{r}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+r}{y+z} = r \\ \frac{y+r}{x+z} = 1 \\ \frac{z+r}{x+y} = \frac{1}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+r)(ry+1) = (rx+r)y \\ (z-r)(rz+1) = (x+r)(rz-1) \\ (y+1)(z+r) = (y+r)(z+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (rx-1)(y+1) = r(x+1)(y-1) \\ (x+r)(z+1) = (x+r)(z+r) \\ (y-r)(z+r) = (y-1)(z+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = a + b \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{2b} \\ \frac{x}{y-z} - \frac{1}{2} = \frac{b}{a-b} \end{cases}$$

۷۸- قاعده کلی برای حل یک دستگاه n بهنجری n مجهولی درجه اول -

نخست بر یک از بهنجریهای دستگاه را ساده میکنیم پس از آن مانند حل یک دستگاه سه بهنجری سه مجهولی درجه اول یکی از مجهولها را حذف میکنیم تا دستگاهی سه آید دارای ۱- n بهنجری و ۱- n مجهول. درین دستگاه نیز یکی از مجهولها را حذف میکنیم باین طریق باز یک بهنجری و یک مجهول آن کم میشود و این کار را آنقدر تکرار میکنیم تا بالاخره یک بهنجری یک مجهولی برسم از حل این بهنجری آن مجهول پیدا میشود چون آنرا در یکی از دو بهنجری دو مجهولی آخرین دستگاه بریم مجهول یک پیدا میشود و از روی این مجهول مجهول دیگر حساب میشود تا آخر.

مثال - دستگاه چهار بهنجری چهار مجهولی زیر را حل کنید :

$$(1) \begin{cases} x + y + z + w = 24 \\ x + 2y + 2z - 9w = 0 \\ 2x - y - 2z + 3w = 0 \\ 2x + 2y - 4z - 5w = 0 \end{cases}$$

حل- چون x را درین دستگاه حذف کنیم (آسانتر مساوی کردن ضریبها است با رعایت تبصره ۷۷) باین ترتیب که یک پنجمی دستگاه مثلاً پنجمی اول را در نظر گرفته و با یک یک پنجمی های دیگر ضریب x را مساوی میکنیم از حذف x

$$\begin{cases} -y - 2z + 10u = 24 & \text{در دو پنجمی اول و دوم پنجمی} \\ 4y + 8z + 2u = 72 & \text{سوم} \\ -y + 6z + 7u = 41 & \text{چهارم} \end{cases} \quad (2)$$

بهست میآید این سه پنجمی تشکیل یک دستگاه سه مجهولی (۲) را میدهد چون درین دستگاه مجهول y را حذف کنیم دستگاه دو مجهولی (۳) بهست میآید

$$(3) \quad \begin{cases} 8z - 3u = 24 \\ 32u = 161 \end{cases}$$

از دستگاه (۳) نخست u و پس از آن z حساب میشود $u = 4$

۵، $z = 4$ که چون آنها را در یکی از پنجمیهای دستگاه (۲) ببریم $y = 7$

بهست میآید. و از روی یکی از پنجمیهای دستگاه (۱) x حساب میشود:

$$x = 1,5$$

مقرین

دستگاههای چند مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + 2z = 1 \\ z + 2u = 11 \\ u + 2x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + 2z - u = 7 \\ z + 2u - x = 11 \\ u + 2x - y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + 2u = 7 \\ 6x + z + 2u = 7 \\ 1y + 2z + 5u = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z + 5u = 11 \\ z + x + 7u = 11 \\ x + y + 2u = 11 \\ x + z + 1y = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + u = 147 \\ x + 2y + 2z + 2u = 267 \\ x + 2y + 2z + 2u = 259 \\ x + 2y + 2z + 2u = 210 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{y}{7} - \frac{z}{7} = 1 \\ \frac{x}{7} - \frac{y}{7} + \frac{u}{9} = 1 \\ \frac{x}{9} + \frac{2z}{5} - \frac{u}{7} = 1 \\ \frac{2y}{7} - \frac{z}{5} - \frac{u}{7} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = 2u \\ x + z = 5u \\ x + y = 2u \\ \frac{1-x}{1-y} = \frac{u}{5} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 5 \\ 2y + z + u = 5 \\ 2z + u + v = 7 \\ 2u + v + x = 14 \\ 2v + x + y = 11 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 12 \\ y + 2z - u = 10 \\ z + 2u - v = 1 \\ u + 2v - x = 1 \\ v + 2x - y = 9 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z + u + v = 15 \\ x + 2y + 4z + 11u + 16v = 57 \\ x + 3y + 9z + 27u + 41v = 159 \\ x + 4y + 16z + 64u + 101v = 453 \\ x + 5y + 25z + 125u + 226v = 975 \end{array} \right.$$

۷۹- تبصره- قاعده حل یک دستگاه n مجهولی قاعده ایست کلی و بعضی دستگاهها بر آسانتری میتوان بجواب رسید.

مثال ۱- دستگاه سه مجهولی سه مجهولی زیر را حل کنید

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = a \\ y + z = b \\ z + x = c \end{array} \right.$$

میتوان برای حل دستگاه قاعده کلی را با یک برداری درین مثال می پسینم که اگر سه بجندهی را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$2(x + y + z) = a + b + c$$

$$(2) \quad x + y + z = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{و یا}$$

حال اگر هر یک از بجندهی های دستگاه (۱) را از بجندهی (۲) کم کنیم مجهول ثانیست می آید از کاستن بجندهی اول از بجندهی (۲) z پیدا میشود

$$z = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$$

$$x = \frac{a+c-b}{2} \quad \text{از کاستن بجندهی دوم از بجندهی (۲)}$$

$$y = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{سوم}$$

مثال ۲- این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = u \\ x + y + z + u = 11 \end{cases}$$

بر وفق (قرین ۲ صفحه ۱۶۱) میتوان چنین نوشت

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = u = \frac{x+y+z+u}{2+3+5+1}$$

و چون بجای u $x + y + z + u$ مساوی ۱۱ را گذاشتیم داشت

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = u = 1$$

ازین تساوی هر چهار مجهول بدست میآید:

$$u = 1 \quad \text{و} \quad z = 5 \quad \text{و} \quad y = 2 \quad \text{و} \quad x = 2$$

بهینطور میتوان بخصوص یک دستگاه دو بهمندی دو مجهولی را که در یکی از دو بهمندی آن

جمله ثابت صفر باشد حل نمود

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

مثلاً برای حل دستگاه

بهمندی دوم را میتوان چنین نوشت

$$\frac{x}{b'} = -\frac{y}{a'}$$

و با مراجعه به بهترین ۲ صفحه ۶۱

$$\frac{x}{b'} = -\frac{y}{a'} = -\frac{ax + by}{ab' - ba'}$$

و چون بجای $ax + by$ مساوی c را گذاریم خواهیم داشت:

$$\frac{x}{b'} = -\frac{y}{a'} = \frac{c}{ab' - ba'}$$

$$y = \frac{-ca'}{ab' - ba'}$$

$$x = \frac{cb'}{ab' - ba'}$$

که از آن

مثال ۲- دستگاه زیر را حل کنید:

$$(1) \begin{cases} \frac{1}{x+y} - \frac{2}{x-z} = 0 \\ \frac{2}{x+y} + \frac{1}{y-z} = 1 \\ \frac{2}{y-z} + \frac{2}{x-z} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

چون برخه‌ها را از این بریم دستگای از درجه دوم پیدا می‌شود اما اگر $\frac{1}{x+y}$ را به مجهول x و $\frac{1}{x-z}$ را به مجهول y و $\frac{1}{y-z}$ را به مجهول z بنمایم یعنی

$$(۲) \quad \begin{cases} \frac{1}{x+y} = t \\ \frac{1}{x-y} = v \\ \frac{1}{y-z} = u \end{cases}$$

دستگاه (۱) چنین می‌شود

$$\begin{cases} t - 2v = 0 \\ 2t + u = 1 \\ 2u + 2v = -\frac{1}{t} \end{cases}$$

که دستگای است سه مجهولی بر حسب t و v و u از حل این دستگاه

$$u = -1 \quad \text{و} \quad v = \frac{1}{t} \quad \text{و} \quad t = 1$$

بنابراین دستگاه (۲) چنین می‌شود

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1 \\ \frac{1}{x-z} = \frac{1}{t} \\ \frac{1}{y-z} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

و یا

که از اصل آن خواهیم داشت $x = 2$ ، $y = -1$ ، $z = 0$

تمرین

دستگاههای زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} y + z - x = a \\ x + x - y = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ x + z = 25 \\ y + z = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 99 \\ \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{z} = 4 \\ \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{xz}{x+z} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{1}{7}$$

$$\begin{cases} \frac{xy}{4y-3x} = 20 \\ \frac{xz}{2x-3z} = 15 \\ \frac{yz}{4y-5z} = 12 \end{cases}$$

را میتوان دارد $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5}$

را، بنامی - برکت انجمنه میانی دستگاه بالا شده

۱) $\frac{x+y}{xy} = 5$ مورد چنان نوشت

$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 5$ ۲) $\frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = 5$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} - 2y = \frac{1}{10} \\ 2\sqrt{z} - 2\sqrt{x} = \frac{1}{15} \\ 2\sqrt{z} - 5y = \frac{1}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} 8x^2 = 125y^2 = 27z^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(5y-2) = (2x+1)(2y-2) \\ (5x-1)(z+1) = (x+1)(2z-1) \\ (y+2)(z+2) = (2y-6)(2z-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz = a(y+z) & \sqrt{\frac{yz}{x}} = a \\ xz = b(x+z) & \sqrt{\frac{xz}{y}} = b \\ xy = c(x+y) & \sqrt{\frac{xy}{z}} = c \end{cases}$$

$$\frac{x-a}{b+c} = \frac{y-b}{a+c} = \frac{z-c}{a+b} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$$

۸- حل دستگاه سه معادله دو مجهولی - دو معادله سه متغیره

دستگاهی میدهد که جوابش را میتوان بدست آورد حال اگر این جواب دو معادله سوم هم صدق کند جواب دستگاه سه معادله است و اگر نه این دستگاه سه معادله جواب ندارد مثال - دستگاه سه معادله دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$(۱) \quad \begin{cases} x + 3y = 9 \\ x + 5y = 7 \\ 2x - 5y = -4 \end{cases}$$

از حل دو به چندی اول دستگاه خواهیم داشت $x = 3$ و $y = 2$
می بینیم که این دو عدد در به چندی سوم دستگاه صدق میکند:

$$2 \times 3 - 5 \times 2 = 6 - 10 = -4$$

بنابراین جواب دستگاه (۱) است

ولی اگر به چندی سوم دستگاه (۱) چنین بود:

$$2x - 5y = 1$$

دستگاه بدون جواب میشد زیرا $2 \times 3 - 5 \times 2$ مساوی با یک نیست
تمرین - تحقیق کنید که هر یک از سه به چندی دستگاه (۱) را میتوان از دو به چندی
دیگر بدست آورد (به شماره ۷۷ مراجعه شود)

۸۱ - نتیجه - از آنچه در بالا گفته شد چنین بر می آید که هر وقت یک دستگاه سه
به چندی در مجموعی دارای جواب باشد هر یک از سه به چندی دستگاه را میتوان
از به چندی دیگر بدست آورد.

همین مطلب را در باره هر دستگاهی که شماره به چندیهایش پیش از شماره مجهولهایش

باشد می توان اد کرد

۸۲- حل و بچندی سه مجهولی - چون در دو بچندی دستگاهی که از سه مجهول را حذف کنیم یک بچندی دو مجهولی بدست می آید و چنانکه می بینیم این بچندی جوابهای بیشمار دارد و بنا بر این دستگاه مبهم است و بهینطور است هر دستگاهی که در آن شماره بچندی کمتر از شماره مجهولها باشد مثال - دستگاه

$$\text{را حل کنید} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

از حذف مجهول y این بچندی بدست می آید $3x - z = 4$ که یک بچندی و مجهولیت جوابهای بیشمار دارد چنانکه اگر z را مساوی ۱ اختیار کنیم x مساوی ۲ میشود و از آنجا y مساوی ۳ میگردد و اگر z را ۲ بگیریم x برابر ۳ میشود و از روی آن y برابر ۱۲ میگردد و غیره

تمرین

این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + y = 5 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - 2y = 1 \\ x + y - z = 1 + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 2y - x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 5 \\ 15x - 25y - 2 = 10z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5y + z = -3 \\ -x + 2y + 5z = 4 \\ 3x - 4y - 2z = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = z - 5 \\ 2x - z = 2y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2\lambda y + 2z = 12 \\ \lambda x + 5x - 3z = -15 \\ 2x + 3y - 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

۲- رد نگاه

اولاً λ را چنان تعیین کنید که دستگاه دارای یک جواب باشد ثانیاً بازار چه مقدار λ دستگاه مبهم میشود؟

۳- بجای λ عددی بگذارید تا این دستگاه مبهم شود

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x - y = 0 \\ 2\lambda x + 3y - 2z = 0 \\ (\lambda + 2)x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

۴- بجای m چه عددی بگذاریم تا دستگاه

$$\begin{cases} x + y = m \\ \alpha x + \beta y = m^2 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y = m^3 \end{cases}$$

دارای یک جواب یکتا باشد

۵- ثابت کنید که یکی از پنجندیه‌های دستگاه

$$\begin{cases} ay + bx = ab \\ ax + by = (a-b)^2 \\ a^2y + b^2x = 2ab^2 \end{cases}$$

رایستوان از دو پنجندی دیگر بدست آورد

ب- حل مسئله های فکری چند مجهولی

۸۳- همان طور که در شماره (۵۰) راجع بحل مسئله های فکری یک مجهولی

گفتیم:

تخت باید صورت مسئله را با دقت خواند و مجهولهای مسئله را انتخاب

کرد.

دوم از روی مسئله رابطه ای را که باید بین مجهولها و معلومها باشد می نویسیم

این رابطه را با پنجندی های مسئله گویند که دستگاه چند مجهولی را تشکیل میدهند

سیوم باید این دستگاه را حل نمود یعنی جواب آن را بدست آورد .
 چهارم باید دید آیا جواب دستگاه جواب مسئله هست یا نیست .
 ۸۴- تبصره - هرگاه دستگاه از درجه اول باشد مسئله را از درجه اول گویند
 و در حفظ بحال مسئله های تفری درجه اول می پردازیم .
 مسئله ۱- مجموع دو عدد x و y برابر s است و تفاضل آنها یعنی
 $x - y$ برابر d است آن دو عدد را بدست آورید .
 حل - این مسئله دارای دو مجهول است که در خود مسئله به x و y نموده
 شده اند از ردی مسئله بین آنها و معلوما این رابطه برقرار است :

$$\begin{cases} x + y = s \\ y - x = d \end{cases}$$

که دستگاهی است و مجهولی چون آنرا حل کنیم جواب دستگاه چنین است

$$x = \frac{s - d}{2} \quad \text{و} \quad y = \frac{s + d}{2}$$

ع مسئله کتاب اول - در اینجا چون مجهولها دو عددند و هر مقداری میتوانند بگیرند
 پس مسئله جواب دارد هر چه باشد s و d

مسئله ۲- فاصله A و B بیست و یک کیلومتر است و چرخه سواری از نقطه
 A پیاده ای از B در یک خط حرکت مینماید اگر بطرف هم آیند پس از ۳۵ دقیقه

و اگر در یک جهت حرکت کنند بطوریکه دو چرخه سوار را A بدنبال پیاده باشد پس از ۶۳ دقیقه بهم میرسند معلوم کنید تندی هر یک را.

حل - تندی دو چرخه سوار را x کیلومتر در دقیقه و تندی پیاده را y کیلومتر در دقیقه بگیریم پس از ۳۵ دقیقه راهی که هر یک پیموده بر ترتیب $35x$ و $35y$ میشود و از روی مسئله این همچندی بدست میآید:

$$(1) \quad 35x + 35y = 21$$

و همچنین اینکه هر یک از آنان در مدت ۶۳ دقیقه پیموده اند بر ترتیب $63x$ و $63y$ میشود و باز از روی مسئله این همچندی حاصل میگردد:

$$(2) \quad 63x - 63y = 21$$

این دو همچندی پس از ساده کردن تشکیل دستگاه زیر را میدهند:

$$x + y = \frac{3}{5}$$

$$x - y = \frac{1}{3}$$

که جواب آن نیست $x = \frac{7}{15}$ کیلومتر و $y = \frac{2}{5}$ کیلومتر ممکن است جواب این دستگاه در از روی دستورهای مسئله پیش بدست آورد.

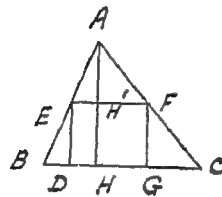
جواب این مسئله که تندیهای این دو متحرک باشد باید عددی مثبتی باشد چون جواب دستگاه عددی مثبت است بنا بر این چنین عددی جواب مسئله باشد.

۸۵- تبصره- همین سکه را یک مجولی حل کردیم (صفحه ۸۹ باین طریق که
تندی پیاده را بر حسب x یعنی تندی دو چرخه سوار بدست آوردیم و مساوی
($x - \frac{3}{5}$) کیلومتر شد و اینجا هم می بینیم که برای حذف کردن y اگر y را بر حسب x
(تندی دو چرخه سوار) از پنجمی اول دستگاه پیدا کنیم همین میشود پس در حقیقت همین
عمل حذف کردن اما در پیش در ذهن خود انجام داده ایم. از مقایسه حل مسئله
براه دو مجولی با راه یک مجولی می بینیم که براه دو مجولی خیلی زودتر و آسانتر جواب
رسیدیم و این آسانی برای این بوده است که مجهول دیگر را بحرف y نمایش
و بجای عمل های فکری علمای نوشتنی انجام دادیم.

مسئله ۳- سه آمیزه از طلا و مس بعبارهای ۸۰۰ و ۷۲۰ و ۴۵۰ گرم داریم اگر آمیزه اولی را با سومی بیا میزیم آمیزه حاصل عیارش ۶۹۵
شود و اگر آمیزه دوم و سوم را با ۶ گرم طلای ویره بیا میزنند آمیزه حاصل
بعبار ۶۰۰ شود و اگر هر سه را با هم ممزوج نمایند آمیزه ای حاصل شود بعبار
۷۲۰ تعیین کنید وزن هر یک را.

حل- چون وزن این سه شمش را بر ترتیب x و y و z گرم فرض کنیم
طلای ویره شمش اول x ۸۰ گرم و طلای ویره شمش سوم z ۴۵ گرم میشود چون
این دو شمش را با هم ممزوج کنیم از طرفی طلای ویره اش $(x + ۰.۸۴۵z)$

میگیریم از آنجا که دو سه گوشه ABC و AEF هم‌اثر داشت



و بفرض $\frac{EF}{BC} = \frac{AH'}{AH}$

نتیجه میشود $DE = y$ و $EF = x$

چون این است گوشه $\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h}$

مثلاً به بار است گوشه‌ای است به ازای h و پهنای a پس این به چندی بدست میآید:

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h}$$

این دو به چندی تشکیل دستگاه دو مجهولی زیر را میدهند:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{h-y}{h} \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{a} \end{cases}$$

از حل این دستگاه x و y بدست می‌آید به این طریق:

چون دو به چندی دستگاه را بر هم تقسیم کنیم x از بین میرود و به چندی یک مجهولی زیر بر حسب y بدست می‌آید:

که از حل آن y بدست می‌آید $\frac{y}{a} = \frac{a(h-y)}{hy}$

و از روی آن x پیدا میشود

$$y = \frac{adh}{ad + eh}$$

$$x = \frac{ahl}{ad + eh}$$

تبصره - در حل این مسئله درازای است گوشه محاطی را موازی قاعده AB گرفتیم
اگر درازای آنرا موازی ارتفاع سه گوشه بگیریم درین صورت فقط در همچنینی اول دستگاه
باید جای x و y را با هم عوض نمود.

بحث - در هر صورت برای این که جوابهای دستگاه در مسئله صدق کند
باید هر یک مثبت باشند و اگر درازا موازی قاعده AB است باید کوچکتر از e باشد
در خیال پهنائی است گوشه نیز باید کوچکتر از h باشد. از مقایسه درازا با e
و پهنای h معلوم میشود که این شرطها برقرار است بنا بر این جوابهای دستگاه
جوابهای مسئله میباشد.

تمرین

۱- مسئله های چند مجهولی را که در صفحه های ۹۲ تا ۱۰۲ نوشته شده و دوباره حل
کنید (از راه چند مجهولی)

۲- بر تکیه بچه ای از دو شای دو دیناری و دیناری پانزده یالی از دو شای جمع
شده بود شمار پنج دیناری و دانه از شمار دو دیناری با کمتر بود و شمار دو دیناری یکی زیادتر
از دو برابر دو شای بود. از هر قسم چند دانه در تکیه بود و است؟

۳- آری میشود دست گوشه ای رسم کرد که دو دوش 250 سانتیمتر و از آنش
دو سانتیمتر و این برین پس از آن تر باشد؟ اگر میشود از آن پهنائی چه است؟

۴- سرمایه شخصی ۵۰۰۰ ریال است که پاره ای از آن را بقرارداد پاره دیگر را از قرار عجز به منفعت داده روی هم ۲۸۰۰ ریال در یک سال سود میسبد - هر یک از دو پاره چند بوده؟

۵- شخصی ۱۵۰۰۰۰ ریال دارد قسمتی ازین پول را از قرار ۴٪ و بانی را از قرار ۵٪ به بهره کاری میسبد - سود قسمت اول دو برابر سود قسمت دوم است هر یک ازین دو قسمت چند است؟

۶- هرگاه پیکرهای در قهای ایک عدد و پیکری را بر خود آن بگیرایم ۱۵ میشود و هرگاه آنرا از عدد بکاهیم ۹ میشود آنقدر که ام است؟
این مسئله را به و راه حل کنید یکی اینکه خود عدد و مجموع پیکرهایش را مجهول بگیرید و یکی اینکه دو پیکر آنرا مجهول بگیرید.

۷- اگر بهوشنگ ۵۰ ریال به پشربه پشربه چهار برابر بهوشنگ خواهد داشت پس از آن اگر پشربه ۱۰۰ ریال به بهوشنگ و فقط دو برابر او خواهد داشت - پیش از داد و ستد هر یک چند دارند؟

۸- دو نفر اگر با هم کار کنند کاری را چهار روز و نیم انجام میدهند ولی پس از اینکه ۱ روز با هم کار کردند ادوی کار را روز دومی به تنهایی و بنال کار اگر وقت ۱/۲ روز دیگر آنرا انجام میدهند هر یک ازین دو نفر به تنهایی تمام کار را چند روز و نیم انجام خواهند کرد؟

۹- شخصی بکار ۱۱ متر پارچه ابریشی و ۷ متر ماهوت خرید به ۱۱۴۰ ریال با ردوم ۹ متر پارچه ابریشی ۱۳ متر ماهوت خرید به ۱۶۶۰ ریال مطلوبست قیمت متربریک .

۱۰- چه برخه ایست که اگر برخه نام و برخه شمار آن $\frac{1}{4}$ بفرایم برابر $\frac{4}{9}$ و برخه از آنها $\frac{1}{4}$ لکسیم برابر $\frac{2}{5}$ گردد ؟

۱۱- دو عدد بدست آورید چنانکه در تقسیم آنها یکدیگر بهر ۷ مانده ۵ باشد و در تقسیم سه برابر بزرگتر سه برابر و برابر کوچکتر بهر ۱۱ مانده ۶ شود .

۱۲- کدام دو عددند که تفاضل حاصل ضرب دهر آنها نسبت آنها یکی است ؟

۱۳- دو چرخه سواری پیش خود حساب میکرد که اگر هر ساعت ۶ کیلومتر شد ترمیرفت دو ساعت بود ترمیرسیده بود و اگر هر ساعت ۶ کیلومتر کند ترمیرفت سه ساعت دیرتر رسیده بود درازی را بیکدیگر پیوده بوده و تندی و چه بوده است ؟

۱۴- فریدون به یوشنگ گفت اگر ده ریال بمن بدهی دو برابر تو خواهم داشت یوشنگ جواب داد که تو پنج ریال بمن بده تا هر دو یک اندازه داشته باشیم - هر کدام چند دارند ؟

۱۵- شخصی برادش میگفت وقتی من بن تو ۱۰۰ م و تو بر من ۱۰۰ م داداشتم وقتی تو بن من

جسی و جی ۳۰ سال خواهم داشت هر یک چند سال دارند ؟

۱۶- دو نفر کتان و ت فرود و زان آنها $\frac{1}{4}$ فرادونی است با هم کار میکنند پس از آنی اولی

که بخیر و زیاده تر از دومی کار کرده ببال و دومی که بدتر از اولی کار کرده از او شکایت میکند ؟

۱۷- دو ظرف هر یک مقداری شیر دارد اگر از ظرف اول که شیرش بیشتر است بقدر شیر ظرف دوم برداشته در دومی بریزیم و دوباره از دومی بقدری که در اولی مانده در اولی بریزیم و بار سوم از ظرف اول بقدر آنچه در ظرف دوم مانده برداشته در دومی بریزیم هر یک از دو ظرف غلاتیتر خواهد داشت - در هر یک از دو ظرف چند لیتر شیر بوده است؟

۱۸- سود سرمایه ای پس از $\frac{1}{4}$ ۸ ماه ۲۸۰ ریال است اگر ۶۰۰ ریال بر سرمایه بیزیم و در نرخ نیز پنج یک آن افزوده شود سود سه ماهه ۱۳۲٫۳ ریال خواهد شد - سرمایه و نرخ چیست؟

۱۹- سود سالانه دو سرمایه که نرخ آنها ترتیب ۴٫۵٪ و ۵٫۵٪ است رویم ۳۰۳۵ ریال میشود ولی اگر ترتیب نرخ عوض شود سود آنها ۳۰۱۸ ریال خواهد بود - هر یک از دو سرمایه چند است؟

۲۰- سود سه سرمایه بزرگهای مساوی اولی پس از سه ماه دومی پس از چهار ماه سومی پس از ۶ ماه یکی است هر یک از سه سرمایه را معلوم کنید در صورتیکه رویم ۳۷۶۲۰۰ ریال باشد.

۲۱- مبلغ اسمی و برات به نسبت ۳ و ۴ بوده تفاوت میان مبلغ فعلی آنها بوعده ۱۲۶ روز و نرخ ۶٪ (برای اولی) و ۵٪ (برای دومی) ۴۸۰ ریال است مبلغ اسمی هر یک چند است؟

۲۲- مبلغ فعلی و برات به نسبت ۳ و ۴ است معین کنید مبلغ اسمی آن دو را در صورتیکه اگر نرخ هر دو از قرار ۵٪ و موعده قلی ۱۲۰ روز و از دومی ۸۰ روز باشد رویم و دشمن زیل

۲۵۱ ریال میشود.

۲۳- سود و سرمایه بانرخمای مساوی پس از ۶ سال بترتیب ۱۷۲۸ ریال و

۱۰۰۸ ریال است بدست آورید سرمایه. نرخ را در صورتیکه سرمایه باروی هم ۲۵۰۰۰ ریال باشد

۲۴- تریل خارجی برای از قرار ۵٪ ۲۰۲۵ ریال و تریل داخلی همان برات از قرار

همان نرخ ۲۰۰ ریال است نت و مبلغ اسی برات چند است؟

۲۵- زمین است بشکل ذوزنقه که برکتها آن ۲۰۰۰ ریال ارزشش ارد قیمت زمین باشد آن

پس از پنجاه از ستار ۴٪ ۱۳۰۸۱۴۵ ریال است. درازای ارتفاع و دو قاعده ذوزنقه

در حساب کنید در صورتیکه بدانیم قاعده کوتاه $\frac{۳}{۷}$ قاعده بلند است و اگر بر قاعده کوتاه ۲۰ متر

افزوده شود و از قاعده بلند ۱۲ متر کم شود بر سطح ذوزنقه ۲۰۸ متر مربع افزوده خواهد شد

۲۶- دو شمش بیک وزن داریم اگر اولی را با نصف دومی بیا میزنیم عیار حاصل $\frac{۲۲}{۲۳}$ و چون

نصف اولی را با پنج یکت دومی بیا میزنیم عیار آمیزه $\frac{۲۷}{۲۵}$ شود عیار هر یک از دو شمش چند است؟

۲۷- دو شمش بعبارهای ۴ و ۵ داریم بچه نسبت این دو را با هم بیا میزنیم تا وزن شمش

حاصل ۸ گرم و عیارش ۵۴ شود؟

۲۸- دو شمش است بعبارهای ۷ و ۸ و اگر نسبت میان وزنها $\frac{۴}{۳}$ است

هر یک این دو شمش را با شمش دومی که عیار ۸۸ و وزن ۱۰۰ گرم بیا میزنیم عیار حاصل ۸۲ و

میشود. وزن هر یک از دو شمش چند است؟

۲۹- دو شمش است بیک وزن اگر اولی را با چهار یک دومی بیا میریم عیار آمیزه حاصل ۹۳٫۵٪ میشود و اگر اولی را با نصف دومی بیا میریم عیار آمیزه حاصل ۹۲٪ میشود عیار هر یک از دو شمش چقدر است؟

۳۰- سه شمش است بعیارهای ۹۵٪ و ۷٪ و ۹۲٪ و ۲ کیلو از شمش اولی با چقدر از هر یک از دو شمش دوم بیا میریم تا شمش بوزن ۳٫۲۴ کیلو و عیار ۹٪ بدست آید؟

۳۱- آمیزه ایست از طلا و مس بوزن ۱۴٫۷ کیلو که چون در آب وزن شود وزنش ۱۳٫۸۵ کیلو است اگر در مایعی دیگر وزن نمایند از وزنش ۶٫۸ کیلو کاسته میشود تعیین کنید وزن طلا و مس و وزن مخصوص مایع را در صورتیکه وزن مخصوص طلا ۱۹٫۶ و وزن مخصوص آب ۸ باشد

۳۲- سه نفر هر یک پولی دارند اگر اولی $\frac{1}{4}$ و سومی $\frac{1}{3}$ پولش را بدومی بدهند پول هر سه یکی میشود. پول هر یک چقدر است در صورتیکه میدایم بروییم ۳۶۰ ریال دارند؟

۳۳- مجموع سه عدد ۴۵ است عدد اول برابر تفاضل عدد سوم از دوم است مجموع عدد اول و دوم ۲۸ است آن سه عدد کدامند؟ (این سئوال جواب ندارد)

۳۴- برای حوضی سه راه آبست A و B و C اگر A و B با هم باز باشند حوض در یک ساعت زده دقیقه پر میشود اگر A و C با هم باز باشند حوض در یک ساعت و ۲۴ دقیقه پر میشود و اگر B و C با هم باز باشند در دو ساعت و ۲۰ دقیقه پر میشود. با هر یک از سه راه آب حوض چند وقت پر میشود؟

۳۵- شمس آمیخته از طلا و نقره و مس داریم بدین ترتیب:

شمس اول ۵ گرم طلا و ۲۷ گرم نقره و ۴۰ گرم مس دارد

شمس دوم ۵۰ " و ۵۲ " و ۷۵ "

شمس سوم ۳۱ " و ۴۸ " و ۲۶ "

از هر یک چند گرم برداشته با هم بیاوریم تا شمس حاصل ۲۰ گرم طلا ۴۳ گرم نقره و ۴۰ گرم مس داشته باشد.

۳۶- پهنه سه گوشه قائم الزاویه ۱۵۰ متر مربع و وترش ۲۵ متر است دو پهلویش را حساب کنید.

۳۷- نسبت درازای پهلوهای یک سه گوشه قائم الزاویه یکدیگر مانند عدد های ۳ و ۴ و ۵ میباشد و پهنه اش ۲۴ متر مربع است پهلوهایش را حساب کنید.

۳۸- از سه گوشه ABC پهلو $BC = a$ و ارتفاع $AH = h$ داده شد و خطی موازی BC چنان کشید که پهنه دوازده نقطه حاصل $\frac{2}{3}$ پهنه سه گوشه گردد.

۳۹- راست گوشه ای پیدا کنید بشمیکه چون دو متر بر پهنایش بفرایم ۵۰ متر از آنرا

بجا بیاوریم پهنه اش تغییر نکند ولی اگر دو متر بر درازایش افزوده شود و ۴ متر از پهنایش کاسته گردد و از پهنه اش ۴۵ متر مربع کم شود.

۴۰- دو دایره بر شعاع های AB و AC و خط دو مرکز آن ها داده شد و نقطه ای بیست

آورد که درازی مماسای دارد از آن نقطه تا بر دو دایره یکی باشد .

* ۴- کره ایست بشاع γ بچه فاصله از سطح کره دور شویم تا اینکه مساحتی را که پیوسته
باشد مساحت سطح منطقه برابر است با حاصل ضرب محیط دایره عظیمه در ارتفاع منطقه .

فضل بنجم مختصات نقطه و نمودار

۸۶- چنانکه میدانیم هر چند ی (کیت) قابل افزایش و کاست است بنا بر این
چند یا تغییر پذیرند مانند زمان که در تغییر است و همچنین حرارت در زمانهای مختلف
و شماره شاگردان کلاسها و غیره.

ممکن است که دو تغییر پذیر بهم بستگی داشته باشند مانند پهلو یک مربع و درازای
پهلوی آن (ضلعهای آن) که بهم بستگی دارند زیرا تغییر یکی موجب تغییر دیگری است چنانکه
اگر درازای پهلوی ۲ متر باشد پهلو آن چهار متر مربع میشود و اگر درازای پهلوی
شش متر شود پهلو ۳۶ متر مربع خواهد شد یعنی هرگاه درازای پهلوی تغییر کند پهلو نیز تغییر
میکند و بعکس اگر پهلو ۴ متر مربع باشد درازای پهلوی ۴ متر خواهد بود و اگر پهلو ۲۰ متر
مربع باشد درازای پهلوی ۴۰ متر میشود یعنی هرگاه پهلو مربع تغییر کند
درازای پهلوی نیز تغییر خواهد کرد.

همچنین است حرارت اجاق و مقدار سوخت آن که بهم بستگی دارند و همچنین
مردم و مسوولان و همچنین گنج یک کار و مقدار فساد آن.
هرگاه دو تغییر پذیر بعضی باشند که تغییر یکی موجب تغییر دیگری گردد یکی از آنها را

رو دیگری را تابع آن متغیر گویند چنانکه در مثال اول اگر در ازای پهلوی مرتب را
 یم پس تابع این متغیر میشود و بعکس اگر پهنه را متغیر بگیریم در ازای پهلوی
 یشد و در مثال آخر اگر گنج گاه را متغیر بگیریم مقدار فاش را تابع آن میشود و بعکس

۸- نمودار - غالباً در زندگی به تغییر پذیرهای برنجوریم (مانند شالهای شش)
 تابع متغیری است مانند شماره قبولیهای شش ساله کشور در سالهای مختلف که
 شماره قبولیها نیز تغییر میکند. همچنین بهما رخوا ربار در هفته های مختلف و بنا
 ه های کشور در سالهای مختلف. همچنین مصرف آهن در سال ۱۳۱۸
 مختلف. همچنین شماره نفوس کشور و غیره.

فبیل موارد تغییرات این تغییر پذیرها را بسطک های مینمایند که آنها را
 یند.

ه نمودار اینست که از روی آن باسانی تغییرات تغییر پذیر و نوع آن معلوم

ل نسیم درجه حرارت هوا در ساعت های مختلف یک شبانه روز در زمستان

:

ساعت	درجه حرارت	ساعت	درجه حرارت
۱۰ صبح	۴۰	پنج بعد از ظهر	۵
۱۱	۴۰.۵	"	۴
ظهر	۵۰	"	۳
یک بعد از ظهر	۵۰.۷	"	۱
۲	۵۰.۳	"	-۰.۵
۳	۵۰	"	-۰.۲
۴	۵۰.۶	"	۳.۵

از روی این جدول می بینیم که از دو صبح تا دو بعد از ظهر درجه حرارت مرتباً از ۴ تا ۳ رده بالا رفته و از آن پس تا ۱۱ آهسته آهسته تا در ساعت یازده بعد از ظهر که به ۳- رسید است.

برای اینکه این تغییرات بهتر دیده شود آنرا معمولاً بوسیله یک نمودار بنمایند.

برای این کار دو آسه (محور) بر هم عمود میکنند مانند دو آسه xy و yz و بر روی هر آسه نقطه o را معمولاً خواستگاه (مبداء) میگیرند.

حال اگر بر یک زمان را (یک ساعت) بیک تکه خطی مثلاً بدرازای yz روی آسه xy بنماییم میتوانیم ساعتها می مختلف را بر روی این آسه بوسیله تکه خطهای بناییم مثلاً برای ۱۲ و ساعت بعد از ظهر بنا بر آنکه ظهر را خواستگاه زمان و زمانهای بعد از

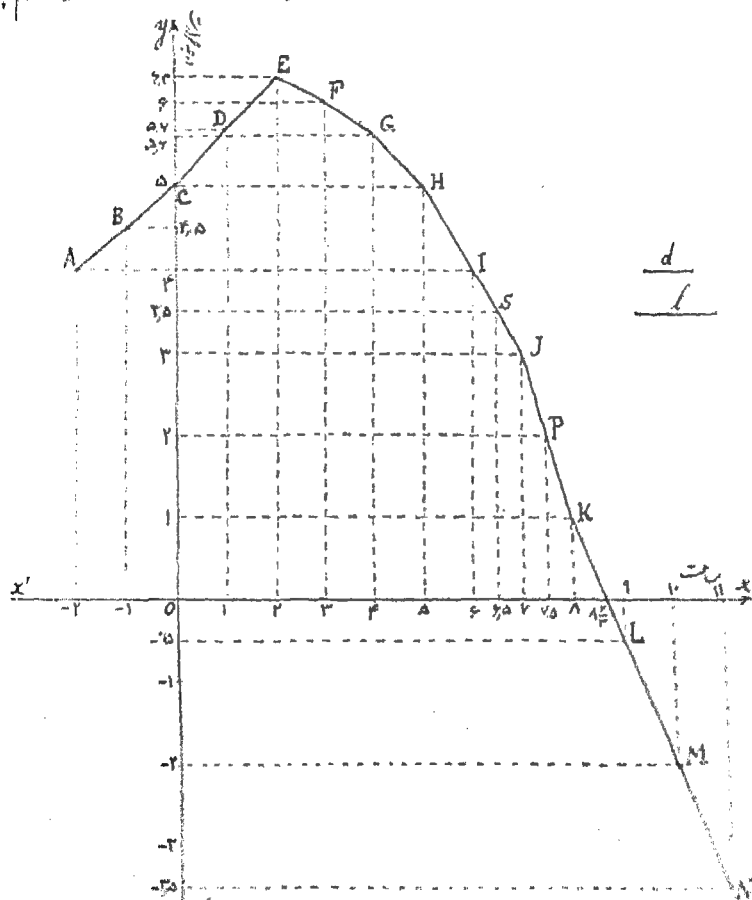
را مثبت بگیریم بر روی این آسه از مبدا o تکه خطی در جهت مثبت مساوی و برابر
 به جدای کنیم تا نقطه ۲ بدست آید. همچنین برای نمایش سه ساعت پیش
 از ظهر کافیت از نقطه o بر این آسه تکه خطی مساوی سه برابر ۱ در جهت منفی جدا
 کنیم تا نقطه ۳ بدست آید بهین طریق ساعتی مختلف از ۳ پیش از ظهر تا ۱۱ بعد از
 ظهر سیله نقطه های $۳- ۲- ۱- ۰- ۱- ۲- ۳- ۴- ۵- ۶- ۷- ۸- ۹- ۱۰- ۱۱$
 نمایش میدیم نقطه o نمایش ظهر است.

بهین ترتیب تکه خطی ۱ را (ممکن است ۱ مساوی ۱۱ باشد) نمایش یکد وجه را
 گرفته و از روی آن بر روی آسه تکه خطی که خطایک که نمایش درجه های مختلف حرارت
 باشد جدا میکنیم. مثلاً برای نمایش $۳۵-$ درجه حرارت سه برابر ۱۱ را از
 o در جهت منفی بر روی این آسه جدای کنیم.

حال اگر مثلاً بخوابیم بنایم که در ساعت ده صبح درجه حرارت ۴ بالای صفر بوده
 از نقطه ۲ روی آسه ۱۱ خطی موازی آسه ۱۱ و از نقطه ۴ روی ۱۱ خطی
 موازی ۱۱ میکشیم تا در نقطه A به دیگر اتلاقی کنند نقطه A نمایش ۴ درجه حرارت
 در ساعت ده صبح است. بنابراین در هر ساعتی که درجه حرارت معلوم باشد
 میتوان نقطه ای مانند A بدست آورد بهین ترتیب نقطه های B و C و D
 و N ... از روی جدول پیش بدست میاید که مثلاً نقطه L نمایش $۵-$

درجه حرارت در ساعت ۹ بعد از ظهر است.

حال نقطه A را به B و B را به C و تا آخر M را به N وصل میکنیم.



نریب خط شکسته ای پیدا میشود که آنرا نمودار درجه حرارت درین مدت گویند.

فایده نمودار - از روی نمودار تغییرات درجه حرارت محسوس تر است زیرا

وقتی درجه حرارت بالا رود نقطه نمایش آن نیز بالا می رود یعنی نمودار بالا می رود و بالعکس

وقتی که درجه حرارت پائین می آید نمودار زیر پائین می آید پس با یک نگاه بر روی نمودار می بینیم که تا دو ساعت بعد از ظهر هوا رو بگرمی است و پس از آن تا ساعت ۱۱ مرتباً سرد میشود علاوه بر این از روی این نمودار تقریباً میتوان معلوم کرد که در یک ساعت معینی درجه حرارت چه بوده و یا در چه ساعتی درجه حرارت به میزان معینی رسیده است.

مثلاً اگر بخواهیم درجه حرارت را در ساعت ۵ بعد از ظهر معلوم کنیم از نقطه 6.5 روی آسمه ox خطی موازی آسمه oy می کشیم تا نمودار را در نقطه s قطع کند نقطه نظیر s روی آسمه oy درجه حرارت آن ساعت را با می دهد که تقریباً 3.5 است. همچنین میتوان تقریباً معلوم کرد ساعتی را که در آن وقت درجه حرارت 2 بوده است.

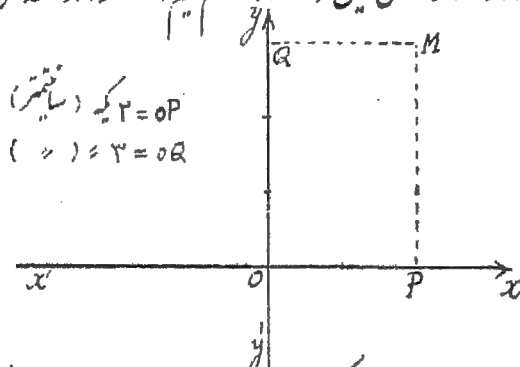
برای این کار از نقطه 2 بر روی آسمه oy خطی موازی آسمه ox رسم می کنیم تا نمودار را قطع کند و نقطه P بدست آید. نظیر این نقطه روی آسمه ox آن ساعت را با می دهد (تقریباً ساعت 7.5)

بخصوص از روی نمودار دیده میشود که در ساعت 8 و 4 دقیقه درجه حرارت صفر شده و از آن بعد زیر صفر است.

می بینیم که هر نقطه مانند A غایش درجه حرارت در زمان معین است که هر یک بیک عدد جبری نموده میشوند این دو عدد جبری را مختصات نقطه گویند.

۸۸- مختصات - در صفحه دو آسمه ox و oy را بر هم عمود می کنیم تا o استگاه

بر دو آسه را نقطه o میگیریم و جهت مثبتی را روی هر یک اختیار می‌کنیم. روی ox جهت مثبت از o به سمت x و روی oy جهت مثبت از o به y خواهد بود حال اگر از نقطه M دو خط موازی این دو آسه رسم کنیم تا x را در نقطه ای مانند P و



y را در نقطه ای مانند Q قطع کند OP (اندازه جبری OP روی آسه x) را اکتیس 1 یا x نقطه M و OQ (اندازه جبری OQ روی آسه y) را ۲ آردنه ۲ یا y نقطه M گویند $x = OP$ و $y = OQ$ (معلوم است برای معین کردن اندازه های جبری OP و OQ باید پس از یافتن نشانه آنها درازای هر یک را با یکدیگر بنویسیم. این یک برای دو آسه ممکن است مساوی یا مختلف باشد)

آسه ox را آسه x یا آسه اکتیس ۱ و آسه oy را آسه y یا آسه آردنه ۲ می‌نامند.

باین ترتیب دیده میشود که هر نقطه دارای یک آیسین و یک اُردنه میباشد که آنها را مختصات این نقطه گویند و دو آسۀ x و y را آسۀ های مختصات نامند.

مثلاً اگر در شکل پیش $O P$ برابر ۲ یکۀ آسۀ ox (سانتیمتر) و $O Q$ برابر ۳ یکۀ آسۀ oy (سانتیمتر) باشد خواهیم داشت:

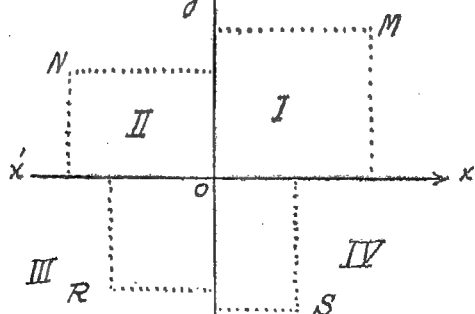
$$\overline{OP} = +۲ \quad \text{و} \quad \overline{OQ} = +۳$$

پس مختصات این نقطه $+۲$ و $+۳$ است گوئیم آیسین M $+۲$ دارد و اُردنه $+۳$ است و آنرا چنین نویسند:

$$M(+۲, +۳) \quad \text{یا} \quad M | ۲$$

۱۹- نشانه مختصات - از آنچه گفتیم معلوم میشود:

۱- هر نقطه برای خود دارای یک آیسین و یک اُردنه است



ب- دو آسۀ مختصات صفحه را چهار ناحیه تقسیم میکنند (مطابق شکل) نقطه آیسین

در ناحیه I واقع باشند دارای آبیس و اردنه مثبت اند مانند نقطه M
و هر نقطه که در ناحیه II قرار داشته باشد آبیس منفی است ولی اردنه آن مثبت
است مانند نقطه N

و نقطه هایی که در ناحیه III هستند آبیس و اردنه آنها هر دو منفی است مانند

نقطه R

بالاخره نقطه های واقع در ناحیه IV آبیس آن مثبت ولی اردنه آنها منفی است

مانند نقطه S

و بطور خلاصه میتوان گفت که آبیس و اردنه نقطه های واقع در ناحیه I و III
هم نشانه اند و در ناحیه های II و IV دارای نشانه مختلف میباشند.

ج - اردنه نقطه های آسه x با صفر است و آبیس نقطه های آسه y با نیز
صفر است.

و - بنا بر این تنها نقطه ای که آبیس و اردنه اش صفر است خاصه ۵ میباشد

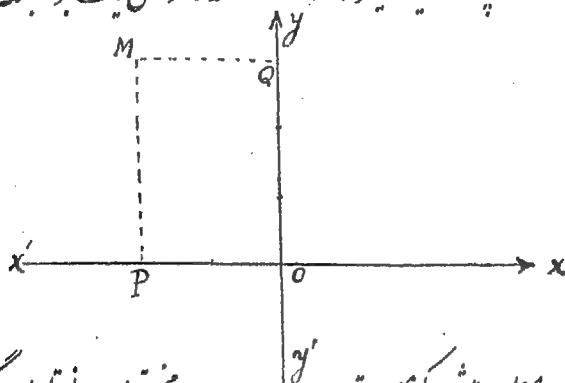
۹۰ - بعکس اگر مختصات نقطه ای را داشته باشیم میتوانیم آن نقطه را در سطح

دو آسه مختصات پیدا کنیم مثلاً $2- | M$ اینطور بدست میآید که بر روی

آسه x با 2 را مساوی ۲ - و بر روی آسه y با 0 را مساوی ۳ +

جدا کنیم از نقطه های P و Q به ترتیب خطی موازی آسه y با و آسه

x نامی شیم این دو خط یکدیگر را در نقطه ای مانند M قطع میکنند که آن نقطه جواب مسئله است. چنانکه دیده میشود همواره مسئله دارای یک جواب است.



بهین ترتیب معلوم میشود که میتوان هر دو عدد را مختصات نقطه ای گرفت.

تمرین

۱- سه گوشه ای (مثلثی) رسم کنید که مختصات رأسهایش (رأسها) چنین باشد

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} -3 \\ -2 \end{vmatrix}$$

۲- از متوازی الاضلاع $ABCD$ مختصات رأسهای A و B و C را داریم

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

نقطه D را پیدا کنید و مختصات آنرا بدست آورید.

$$3- \text{ این نقطه را پیدا کنید } A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ و } B \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \end{vmatrix} \text{ و } C \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$$

تحقیق کنید که هر سه روی خط راستی واقعند که از خاستگاه میگذرد.

$$4- \text{ سه دسته جواب بپنجدی } y - 2x = 0 \text{ را بدو نحوه پیدا کنید و هر دو سه را}$$

مختصات نقطه ای بگیرید و تحقیق کنید که این نقطه با بر خط راستی واقعند که از خاستگاه میگذرد

۵- این نقطه را پدیدار کنید $A \left| \frac{1}{4} \right.$ $B \left| -\frac{1}{4} \right.$ $C \left| \frac{1}{4} \right.$ و تحقیق کنید

که هر سه روی خط راستی واقعند.

۶- سه دسته جواب بچندی $0 = 1 - 3y - 2x$ را به لحاظ پدیدار کنید و در

دسته را مختصات نقطه ای بگیرید و تحقیق کنید که این نقطه با بر خط راستی قرار دارند که از خاستگاه میگذرد.

این خط بر آسه را در نقطه ای قطع میکند. مختصات این نقطه را پدیدار کنید.

۷- درجه حرارت بدن ناخوشی در مدت ۱۲ ساعت هر دو ساعت به دو ساعت چنین

بوده است:

زمان	۸ صبح	۱۰ صبح	ظفر	دو بعد از ظفر	۴ بعد از ظفر	۶ بعد از ظفر	۸ بعد از ظفر
درجه حرارت	۳۶	۳۷.۵	۳۸.۵	۳۸.۵	۳۸	۳۹	۳۷

نمودار تباین ناخوشی را بکشید.

یادآوری: چون حرارت بدن ناخوشی معمولاً از ۳۵ پائین تر نیست بنابراین آن

که در روی آسه درجه حرارت خاستگاه ۵۰ را درجه ۳۵ بگیریم بنابراین برای عنوان درجه ۳۵ نسبت نقطه ای که از ۵۰ روی آسه در جهت مثبت به آسه بگیریم.

۸- فرت را از این پشته در آن زمان که در ۳۰ درجه ۳۵ در ۳۰ درجه ۳۵ چنین بود است:

سال	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
مقدار درختان تن ۱۰۰۰	۶/۱	۶/۵	۵/۵	۵/۳	۵/۷	۵/۲	۴/۷	۴/۸	۷/۲	۱۴/۱۳	۱۵/۱۴

نمودار آن را بکشید.

۹- شماره قبول شدگان نهائی دوره دوم دبیرستان کشور در سالهای ۱۲۹۵

چنین است: ۱۳۰۵

سال	۱۳۰۵	۱۳۰۶	۱۳۰۷	۱۳۰۸	۱۳۰۹	۱۳۱۰	۱۳۱۱	۱۳۱۲	۱۳۱۳	۱۳۱۴	۱۳۱۵
شماره	۱۱	۱۸	۱۸	۱۲	۸	۹	۲۹	۳۷	۵۷	۷۷	۱۱۰

نمودار آن را بکشید.

۱۰- شماره قبول شدگان نهائی دوره دوم دبیرستان کشور در سالها ۱۳۰۶

تا ۱۳۱۷ چنین است:

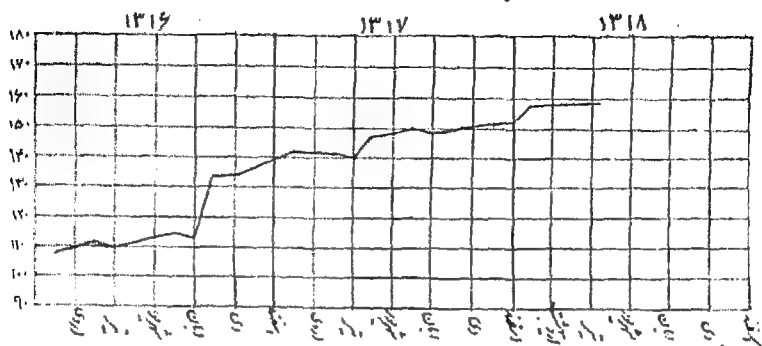
سال	۱۳۰۶	۱۳۰۷	۱۳۰۸	۱۳۰۹	۱۳۱۰	۱۳۱۱	۱۳۱۲	۱۳۱۳	۱۳۱۴	۱۳۱۵	۱۳۱۶	۱۳۱۷
شماره	۱۶	۱۸	۲۰	۳۳	۳۷	۴۳	۶۰	۷۷	۷۴	۸۵	۱۱۱	۱۰۸

نمودار آنرا بکشید.

۱۱- نمودار سیر بزرگترین در ایران در سالهای ۱۳۱۵ و ۱۳۱۶ و ۱۳۱۷

و ۱۳۱۸ چنین است:

پایه متوسط سال ۱۳۱۵ = ۱۰۰



ازین نمودار چه میفهمید؟

۹۱- نمودارهای دیگر- غیر از نموداری که گفتیم تغییرات تغییر پذیر را
بوسیله نمودارهای دیگری نیز نمایند

مثلاً شماره قبول شدگان شش ساله ابتدائی از سال ۱۳۱۱ تا ۱۳۱۷
مطابق این جدول است :

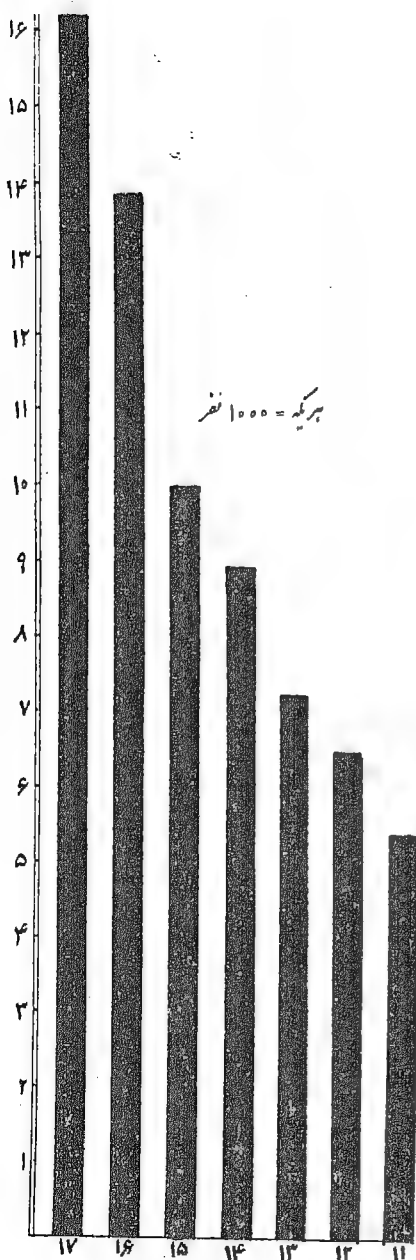
سال	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
شماره	۵۴۱۷	۶۵۳۶	۷۲۵۳	۸۸۸۴	۱۰۰۰۷	۱۳۸۰۹	۱۶۲۲۳

برای نمایش تغییرات شماره قبول شدگان ابتدائی درین ۷ سال ممکن است
غیر از طریق پیش چند راه دیگر بکار برود :

نمودار ۱- شماره قبول شدگان بر سال را بایک راست گوشه بنمایند
راست گوشه سالهای مختلف هم دارای قاعده مساوی هستند و بلند می

متناسب با شماره قبولیهای آن
سال است. چنانکه اگر هر یک سائتیر
بلندی را نمایش شماره ۱۰۰۰ نفر
قبولی بگیریم راست گوشه نمایش سال
اول تقریباً به بلندی ۵٫۴
سائتیر

هر یک = ۱۰۰۰ نفر



۶٫۵ = و در سال ۱۲

۷٫۲ = و در سال ۱۳

۸٫۹ = و در سال ۱۴

۱۰ = و در سال ۱۵

۱۳٫۸ = و در سال ۱۶

۱۶٫۲ = و در سال ۱۷

خواهد بود.

و باین ترتیب این نمودار را

خواهیم داشت.

از جدول پیش نیز می توانستیم تغییرات شماره قبولی را درین مدت بضمیمه می
چنانکه می پسیم از روی نمودار این تغییرات محسوس تر است و از روی آن نموداری
نسبت تقریبی شماره قبولی هر سال با سالهای دیگر بدست می آید.
بترصه - بوسیله این نوع نمودار معمولاً چند بیانی را با هم می سنجند که
از یک جنس باشند و ن اینکه لزوماً بهم بستگی داشته باشند. مثلاً مقایسه
درازای راه آبهنهای چند کشور و پهنه چند کشور و فرستاده های چند
کشور.

تمرین

۱- شماره دختران قبول شده در دوره شش ساله دبستان از سالهای ۱۳۰۰

تا ۱۳۰۹ چنین است:

سال	۱۳۰۰	۱۳۰۱	۱۳۰۲	۱۳۰۳	۱۳۰۴	۱۳۰۵	۱۳۰۶	۱۳۰۷	۱۳۰۸	۱۳۰۹
شماره	۱۵۱	۱۸۰	۲۰۹	۳۱۳	۳۸۰	۴۵۱	۶۴۹	۷۶۲	۱۰۲۹	۱۱۳۹

نمودار آن را بکشید.

۲- شماره دختران دوره شش ساله دبستان در سالهای ۱۳۱۰ تا ۱۳۱۷ چنین است:

سال	۱۳۱۰	۱۳۱۱	۱۳۱۲	۱۳۱۳	۱۳۱۴	۱۳۱۵	۱۳۱۶	۱۳۱۷
شماره	۱۳۸۴	۱۴۰۴	۱۷۳۰	۱۸۶۶	۲۲۵۳	۲۴۶۵	۲۳۶۷	۲۹۳۰

-۲۰۹-

نمودار آن را بکشید.

۳- شماره فارغ التحصیلانی آموزشگاههای عالی در سالهای اخیر چنین است:

سال تحصیلی	۱۱-۱۰	۱۲-۱۱	۱۳-۱۲	۱۴-۱۳	۱۵-۱۴	۱۶-۱۵	۱۷-۱۶
فارغ التحصیل	۷۴	۱۱۵	۱۰۲	۱۸۳	۳۰۵	۳۶۷	۳۲۱

نمودار آنرا بکشید.

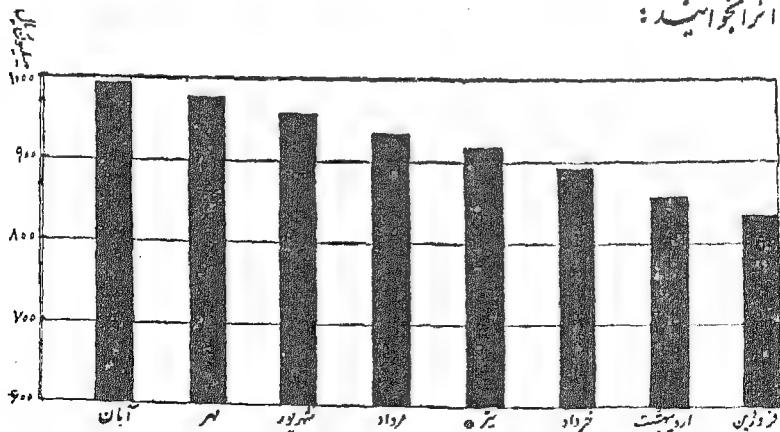
۴- فرستاده پسته ایران در سالهای ۱۳۰۵ و ۱۵ چنین بوده است:

سال	۱۳۰۵	۱۳۰۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
فرستاده پسته	۱۸۲	۴۷۸	۵۷۱	۴۳۱	۶۸۹	۵۵۳	۳۶۶	۳۵۹	۹۱۲	۱۴۱۳	۱۵۱۴

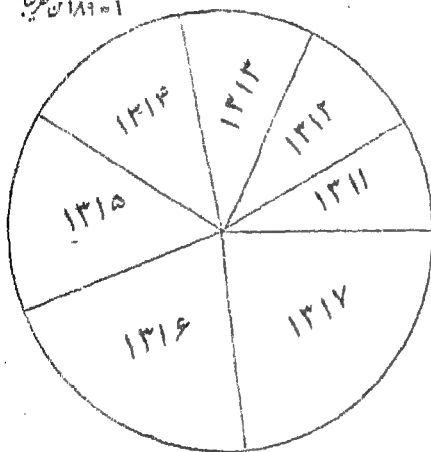
نمودار آنرا بکشید.

۵- نمودار اسکناس های در دست مردم از فروردین تا آبان ۱۳۱۸ چنین است

آنرا بنویسید:



نمودار ۲- دائرة ای بشعاع اختیاری رسم می کنیم و شماره قبولیهای
هر سال را بقطاعی ازین دائرة مینماییم که زاویه آن قطاع متناسب باشد بشماره
۱۸۱ = ۱ تقریباً



قبولیهای آن سال - برای

این کار ۲۶۰ درجه را نسبت

شماره قبولیهای این هفت

سال بخش می کنیم

ازین نمودار نیز باسانی

تغییرات شماره قبولیهای

سالها معلوم میشود یعنی در سالی که قطاع آن بزرگتر است شماره قبولیهای آن

سال زیادتر است و نیز از مقایسه قوسهای قطاع ما می توان نسبت

پن متبوی ما را معلوم کرد.

تبصره - این نمودار بیشتر وقتی بکار میرود که بخواهند نسبت پن چندپای

بجنس را مقین کنند مانند مقایسه پننه های چند کشور و مقایسه بزرگ

مختلف یک خانواده و یکسال و مقایسه نفوس شرادای مختلف کرده زمین

و نمایش مقدار فرستادهای مختلف یکساله یک کشور.

مزمین

فرستاده های ایران به کشورهای نامبرده زیر در سال اقتصادی ۱۳۱۷ ر ۱۸
چنین بوده است :

کشور	آلمان	اتحاد جماهیر شوروی	بریتانیا بزرگ	هند انگلیس	دولت متحد آمریکا	ژاپون	بلژیک	هند
مبلغ بیلیون ریال	۳۰۱٫۸	۲۵۰٫۶	۶۴٫۶	۳۸٫۲	۵۲	۱۶٫۱۴	۶۲	۶٫۳
کشور	هند	عراق	فرانسه	چکوسلوواکی	مالزی	سوئد	ایتالیا	
مبلغ بیلیون ریال	۳	۲۲٫۹	۸٫۹	۶٫۴	۶٫۵	۴٫۷	۳	

نمودار آمرا بکشید .

نمودارهای دیگر - غیر از سه نمودار بالا نمودارهای دیگری نیز معمول است
درین نمودارها چندیکه را بشکل های شبیه خود نمایش میدهند با اندازه های
مختلف بعضی که اندازه هر که ام تناسب است با مقدار چندی نظیرش مثلاً
اگر خواهند مقدار نفت های که هر سال در کشورهای مختلف استخراج میشود
با هم مقایسه کنند ممکن است آنها را به پیت های متشابه نمایش دهند که
در شکل به راست گوشه های متشابه نموده میشود (و پهنه هر راست گوشه متشابه
با مقدار نفت سالیانه آن کشور است .

پهچین برای مقایسه جمیعت کشورهای مختلف جمیعت هر کشور را با آدمی شبیه
با کثرت امانی آنها نمایش میدهند بطوریکه بزرگی و کوچکی آنها اختلاف جمیعت
آن کشور را میسرسانند .

همچنین اندوخته طلا را بکته های طلا که شماره آنها برای هر کشور متناوب
با اندوخته طلای آن کشور است مینمایند.

و وقتی میخواهند در کشورهای دریائی گنجایش کشتی های بازرگانی آنها را
بنمایند گنجایش کشتی های بازرگانی هر کشور بیک کشتی نایش میدهند که بزرگی آن متناسب
با گنجایش کشتی های بازرگانی همان کشور است.

بخش دوم

پنجدهیای یک مجهولی درجه دوم

فصل اول

حل پنجدهیای یک مجهولی درجه دوم

۹۲- تعریف - پنجدهی یک مجهولی را از درجه دوم گوئیم هرگاه تمام جمله های یک طرف بررم و ساده کنیم عبارت چند جمله ای از درجه دوم بر حسب آن مجهول بدست آید مانند پنجدهیهای زیر:

$$x^2 - 9 = 0 \quad \text{که پنجدهی درجه دومی است نسبت به مجهول } x$$

$$a^2 - 3a = 0$$

$$y^2 + 5y = 6$$

پنجدهی پنجدهی $x(x^2 - 3x) = (x^2 - 1)(x^2 + 3)$ هم از درجه دوم است زیرا پس از ساده کردن چنین میشود:

$$2x^2 + 3x - 3 = 0$$

و بطور کلی هرگاه تمام جمله های پنجدهی درجه دومی را بیک طرف بریم و آنها را ساده

کنیم اگر a را ضریب درجه دوم مجهول آن همجندی (مثلاً x) بگیریم و b را ضریب درجه اول آن و c را جمله معلوم قرار دهیم آن همجندی چنین میشود:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{شماره ۸۸ جلد اول})$$

که در آن a باید همواره مخالف صفر باشد. این همجندی را صورت کلی همجندیهای درجه دوم گویند.

بنابر آنکه b یا c و یا هر دو صفر باشند همجندیهای

$$ax^2 = 0 \quad \text{و} \quad ax^2 + bx = 0 \quad \text{و} \quad ax^2 + c = 0$$

بدست میآید که هر یک را همجندی ناقص درجه دوم گویند مانند همجندی:

$$5x^2 - 9 = 0 \quad \text{و} \quad 2x^2 + 3x = 0 \quad \text{و} \quad 3x^2 = 0$$

۹۳- حل همجندیهای درجه دوم - چنانکه میدانیم حل یک همجندی ناقص درجه دوم را با عبارتهای زیر میتوانیم پیدا کنیم. چون بجای مجهول در همجندی گذارده شود تساوی عددی یا اتحاد بدست آید و این عدد یا عبارتهای جوابهای آن همجندی نامیم.

نخست- حل همجندیهای ناقص درجه دوم - الف- حل $ax^2 = 0$

چون ضریب x یعنی a مخالف صفر است بنابراین $x^2 = 0$ و از آنجا

$x = 0$ یعنی جواب همجندی صفر میباشد.

ب- حل یخندی $ax^2 + bx = 0$ مثلاً میخوایم یخندی

را حل کنیم چون طرف اول را تجزیه کنیم یخندی بدین

$$2x^2 - 3x = 0$$

صورت درآید :

$$x(2x - 3) = 0$$

که بموجب شماره ۱۲۳ جلد اول یا $x = 0$ و یا $2x - 3 = 0$ که جوابهای آنها صفرد $\frac{3}{2}$ است .

می بینیم هرچه باشد ضریبها همیشه یخندی $ax^2 + bx = 0$ دارا
و جوابست که یکی از آنها صفرو دیگری $-\frac{b}{a}$ است

زیرا یخندی بالا را میتوان چنین نوشت $x(ax + b) = 0$ که خواهیم
داشت یا $x = 0$ و یا $ax + b = 0$ که از آن نتیجه

$$x = -\frac{b}{a} \text{ میشود}$$

پیش می ساد

۱- جوابهای این یخند یها را بدست آورید :

$$x^2 - 3x = 0$$

$$y^2 = 5y$$

$$2y^2 + 3y = 0$$

$$b^2 = -2b$$

$$2a^2 - a = 2a$$

$$x^2 + 3x = 2x^2$$

۲- این یخند یها را حل کنید :

$$(3x-1)(3x+4) = (x+2)(x-2)$$

$$(a-5)(2a-1) = 2a^2 - 4a + 5$$

$$(x-2)(x+1) - 2x+2 = (x+3)^2 - 9$$

۷- حل بچندی $ax^2 + c = 0$ مثلاً میخوایم بچندی

$$4x^2 - 9 = 0 \quad \text{را حل کنیم}$$

$$x^2 - \frac{9}{4} = 0 \quad \text{دو طرف را بر ۴ بخش می کنیم}$$

چون طرف اول را بسازیم (شماره ۱۲۱ جلد اول)

$$(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2}) = 0 \quad \text{خواهیم داشت:}$$

$$x - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{یا} \quad x + \frac{3}{2} = 0 \quad \text{بموجب (شماره ۱۲۳ جلد اول)} \quad \text{و یا}$$

$$x + \frac{3}{2} = 0 \quad \text{که از حل هر کدام یک جواب بدست می آید}$$

پس بچندی $4x^2 - 9 = 0$ دارای دو جواب قرینه $\pm \frac{3}{2}$ است

مثال دیگر- برای حل بچندی $3x^2 + 13 = 0$ می بینیم که طرف اول

تجزیه پذیر بازدهی اول نیست. بنابراین نمیتوانیم جوابهای آن را

ازین راه بدست آوریم ولی واضح است که این بچندی جواب ندارد

زیرا x هر چه باشد توان دومش مثبت است (و یا صفر) و چون در عدد مثبتی

(مانند ۲) ضرب و با عدد مثبتی (مانند ۱۳) جمع شود حاصل مثبت میشود

یعنی هیچوقت مساوی صفر نمیشود بنابراین این معجزی جواب ندارد. همچنین است.

معجزی $-۷ = x^2 - ۹$ که جواب ندارد بدیلی مانند پیش.

پس هرگاه در معجزی $ax^2 + c = 0$ ضریب درجه دوم و مقدار معلوم (یعنی a و c) هم نشانه باشند معجزی دارای جواب نیست و در غیر این صورت دارای دو جواب قرینه $\pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ است.

پیشش های ساده

۱- نخست معلوم کنید که ام یک از این معجزه ها دارای جواب میشود که ام یک جواب ندارد.

پس آن معجزه یا تیر که دارای جواب هستند حل کنید.

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$2y^2 = 161$$

$$-2y^2 = -27$$

$$5x^2 + 125 = 0$$

$$-3x^2 = 24$$

$$-y^2 + 16 = 0$$

$$-5x^2 - 20 = 0$$

۲- این معجزه ها را حل کنید:

$$(2x-3)(x+5) = x^2 + 7x - 6$$

$$(x+1)(x-1) = (x-1)^2 + x^2 + 2x - 2$$

$$(3x+5)(2x-3)-3x = (5x-1)(x+1)-6x$$

دوم - حل یچندی کامل درجه دوم - مثلاً بنویسیم یچندی

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

را حل کنیم. کوشش می کنیم که طرف اول این یچندی را بصورت تفاضل دو توان دوم دریا و ریم تا بتوانیم مانند یچندیهای بالا آن را تجزیه کرده حل کنیم.

برای این کار عددی پیدا می کنیم که چون بر $x^2 - 3x$ افزوده شود حاصل توان دوم یک دو جمله شود آن عدد $(-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ است

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = (x - \frac{3}{2})^2 \quad \text{زیرا}$$

از پنجا خواهم داشت $x^2 - 3x = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$
که چون در یچندی بالا بریم چنین خواهد شد:

$$(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0$$

و یا
که میتوان آنرا تجزیه نمود (بصورت $a^2 - b^2$ است):

$$(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}) = 0$$

و بموجب شماره ۱۲۳ کتاب اول خواهیم داشت:

$$x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{و یا} \quad x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

که از حل هر یک یک جواب برای معادله پیدا میشود پس معادله را با دو جواب

$$x=1 \quad \text{و} \quad x=2 \quad \text{میباشد}$$

مثال دیگر - میخواهیم معادله $2x^2 - 5x + 2 = 0$ را حل کنیم

ضریب x^2 یعنی ۲ را ساده میکنیم: $2(x^2 - \frac{5}{2}x + 1) = 0$ مانند

مثال پیش داخل پرانتز را بصورت تفاضل دو توان دوم در میآوریم

$$x^2 - \frac{5}{2}x = (x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16}$$

بنابراین معادله را چنین میشود:

$$2[(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{9}{16}] = 0$$

$$2(x - \frac{5}{4} - \frac{3}{4})(x - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}) = 0 \quad \text{و یا}$$

$$x - \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 0 \quad \text{و یا} \quad x - \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = 0 \quad \text{پس یا}$$

که از حل هر یک جوابهای معادله بدست میآید $x = \frac{1}{2}$ و $x = 2$

مثال دیگر - میخواهیم معادله $x^2 - 2x + 5 = 0$ را حل کنیم

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \quad \text{چون}$$

پس معادله را چنین میشود:

$$(x-1)^2 - 1 + 5 = 0$$

$$(x-1)^2 + 4 = 0 \quad \text{و یا}$$

می بینیم که طرف چپ این بهنجدی تجزیه پذیر بازه های درجه اول نسبت به این
عنوان آنرا با این راه حل نمود ولی واضح است که این بهنجدی جواب ندارد زیرا
 x هر چه باشد $(x-1)^2$ همیشه مثبت (و یا صفر) است چون به ۴ افزوده
شود حاصل همواره مثبت بوده و به چوکت مساوی صفر نمی شود.

تمرین

۱- این بهنجدها را حل کنید:

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad 2x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad 2y^2 - 4y - 3 = 0$$

$$2x^2 + 7x + 3 = 0 \quad 3x^2 - 7x - 6 = 0$$

۲- جوابهای این بهنجدها را بدست آورید:

$$(2x-1)(3x-2) = x^2 + 5x - 6$$

$$(3x-2)^2 - 7x = (x-1)(x+1) - 15x + 17$$

$$x^2 - 3x + (x-1)^2 = 2x^2 + 7 - (x+1)^2$$

۹۴- حل بهنجدی کلی $ax^2 + bx + c = 0$ چون در هر

اول بهنجدی a را ساده قرار دهیم بهنجدی باین صورت نوشته میشود:

$$(1) \quad a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

می‌توان $x^2 + \frac{c}{a}x$ را دو جمله اول توان دوم یک دو جمله گرفت که جمله اول آن x باشد بنابراین جمله دوم آن

$$\frac{cx}{a} : 2x = \frac{c}{2a}$$

خواهد بود

$$(x + \frac{c}{2a})^2 = x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{c^2}{4a^2} \quad \text{و}$$

$$x^2 + \frac{c}{a}x = (x + \frac{c}{2a})^2 - \frac{c^2}{4a^2} \quad \text{پس}$$

و چون درمجموعی (۱) برحسب چنین خواهد شد:

$$(2) \quad a \left[(x + \frac{c}{2a})^2 - \frac{c^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0$$

که همان معادله (۱) است که باینصورت نوشته شده حال اگر:

$$\text{اولاً } c^2 - 4ac < 0 \quad \text{در حالت داخل کرشه معادله (۲) هرگز}$$

باشد x مثبت خواهد بود زیرا $(x + \frac{c}{2a})^2$ همیشه مثبت (و یا صفر) است

و بعد مثبت $-\frac{c^2 - 4ac}{4a^2}$ جمع میشود و حاصل مثبت میگردد بنابراین

هیچوقت صفر نمیشود پس در این حالت معادله جواب ندارد.

$$\text{ثانیاً } c^2 - 4ac > 0 \quad \text{در اینصورت معادله (۲) را میتوان چنین}$$

$$\text{نوشت} \quad a \left[(x + \frac{c}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{c^2 - 4ac}}{2a})^2 \right] = 0$$

که پس از تجزیه کردن طرف اول بصورت زیر نوشته میشود:

$$(۳) \quad a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0$$

و چون a مخالف صفر است باید دست کم یکی از دو سازو دیگر صفر باشد که از صفر قرار دادن هر یک از آنها جوابهای زیر بدست میآید:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

پس در حالتی که $b^2 - 4ac > 0$ (یا $b^2 - 4ac < 0$ یا $b^2 - 4ac = 0$) یا مثبت یا منفی یا صفر باشد، دو جواب مجزا دارد که میتوان بر دو در یک دستور نوشت

$$(۴) \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثلاً $b^2 - 4ac = 0$ در حالتی که $b^2 - 4ac = 0$ چنین میشود

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{یعنی} \quad x + \frac{b}{2a} = 0 \quad \text{و یا}$$

در حالتی که تنها یک جواب دارد.

توضیح - در حالتی که $b^2 - 4ac = 0$ است میتوان جواب را

$$x = \frac{-b \pm 0}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

که آنرا جواب مضاعف خوانند.

۹۵- قاعده برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$

نمخت $b^2 - 4ac$ را حساب میکنیم سه حالت اتفاق میافتد:

۱- $b^2 - 4ac < 0$ بهنجدی ریشه ندارد.

۲- $b^2 - 4ac > 0$ بهنجدی دارای دو ریشه متمایز

میشود $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

۳- $b^2 - 4ac = 0$ در حالت بهنجدی دارای یک جواب ^{عوض} تنها

دارد و ریشه مساوی با هم است $x = -\frac{b}{2a}$

مثال ۱- بهنجدی $2x^2 - 5x + 2 = 0$ را حل کنید

چون $b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9$ مثبت است پس بهنجدی دارای

دو جواب متمایز $x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$ میباشد یعنی $x = 2$

و $x = \frac{1}{2}$

مثال ۲- بهنجدی $4x^2 + 4x + 1 = 0$ را حل کنید

چون $b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$ صفر است بنابراین بهنجدی دارای یک جواب

مضاعف $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ میباشد.

مثال ۳- بهنجدی $5x^2 - x + 1 = 0$ را حل کنید

ببین این بهنجدی منفی است بنابراین جواب ندارد.

۹۶- تبصره ۱- در حالتیکه ضریب x یعنی b جفت باشد ریشه ای

بهنجدی را از روی دستور ساده تری بدست میآوریم:

-۲۲۴-

چون نصف b را b' بگیریم یعنی $\frac{b}{2} = b'$ ، و یا $b' = \frac{b}{2}$ دانستیم
دستور (۷) بگیریم چنین خواهد شد:

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} \quad \text{و یا}$$

$$x = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} \quad \text{و یا}$$

$$(۸) \quad x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \quad \text{پس}$$

مثال - برای حل بجهندی $x^2 - 4x + 3 = 0$ بهتر است که از روش
دستور (۸) عمل شود

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3}}{1} = 2 \pm 1$$

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 3 \quad \text{بنابراین}$$

۹۷- تبصره ۲- در حالتیکه $b^2 - 4ac$ مثبت است دیدیم
که بجهندی را بصورت (۳) میتوان نوشت یعنی

$$ax^2 + bx + c =$$

$$a \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \right)$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{و یا}$$

یعنی: هر سه جمله درجه دوم که دارای دو ریشه غیر مساوی باشد

تجزیه میشود بجاصل ضرب ضریب درجه دوم در دو سازه درجه اول
 $x - x_1$ و $x - x_2$ که x_1 و x_2 ریشه های آن باشند.
 در حالتیکه $ax^2 + bx + c = 0$ باشد سه جمله درجه دوم با این صورت درمیآید:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \\ = a(x - x_1)^2 = a(x - x_2)^2$$

یعنی: در حالت سه جمله درجه دوم مساویست با حاصل ضرب
 ضریب درجه دوم در توان دوم یک دو جمله درجه اول.
 مثال ۱- عبارت $5x^2 + 7x - 6$ را بسازه های درجه اول
 تجزیه کنید.

چون دارای دو ریشه متمایز $x_1 = \frac{3}{5}$ و $x_2 = -2$ میباشد بنا
 بر این با این صورت تجزیه میشود:

$$5x^2 + 7x - 6 = 5 \left(x - \frac{3}{5} \right) (x + 2) \\ = (5x - 3)(x + 2)$$

مثال ۲- عبارت $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$ را تجزیه کنید
 چون مبین آن صفر است بنا بر این

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = (x - \sqrt{3})^2$$

تمرین

۱- معجزه‌های زیر را حل کنید:

$$3x^2 + 24x + 21 = 0$$

$$x^2 - 2.4x + 2.1 = 0$$

$$14x^2 - 33 = 71x$$

$$6x^2 + 26\frac{1}{2} = 25\frac{1}{3}x$$

$$(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{5}) = 0$$

$$(x-1)^2 = 5(x^2-1)$$

برای حل این دو معجزه باید ضرایب را انجام داد و یکد از شکل معجزه‌ی ریشه نامعلوم.

$$3x^2 = \frac{2}{3}(x + \frac{4}{3}) + 2x^2$$

$$acx^2 - (a^2 + b^2)x + abc = 0$$

$$acbx^2 - (a^2b^2 + a^2)x + abc = 0$$

$$x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0$$

$$y^2 - 2(a - b)y = (a + b)^2$$

$$(a^2 - b^2)y^2 - 2(a^2 + b^2)y + a^2 - b^2 = 0$$

$$(a^2 - b^2)(x^2 + 1) = 2(a^2 + b^2)x$$

۲- سه معجزه‌ی زیر را با بازه‌های اول تجزیه کنید:

$$2x^2 - 2x - 3$$

$$x^2 + x\sqrt{3} - 6$$

$$x^2 - 2x\sqrt{5} + 4$$

$$x^2 + 5x + 3$$

$$x^2 - (a+b)x + ab$$

$$x^2 - ax - 2a^2$$

$$x^2 + (a+1)x + a$$

تبصره- عموماً اتفاق میافتد که $4ac - b^2$ توان دوم کامل فیت در صورت جوابهای بجندهی گنگ بوده و مقدار آنها را میتوان با تقریری که منظور است بدست آورد.

مثلاً جوابهای بجندهی $2x^2 - 9x + 5 = 0$ چنین است:

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 40}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{4}$$

ریشه دوم ۴ تا $\frac{1}{4}$ تقریب ۴٫۶ است پس مقدار تقریری جوابها چنین است

$$\frac{9 \pm 6.4}{4} \quad \text{و} \quad x_1 \approx 3.85 \quad \text{و} \quad x_2 \approx 0.65$$

و بواسطه همین تقریب است که اگر مثلاً بجای x در بجندهی $2x^2 - 9x + 5 = 0$

عدد ۳٫۸۵ را قرار دهیم طرف اول صفر نمیشود ولی اگر بجای x مثلاً عدد

$$\frac{9 + \sqrt{41}}{4}$$

را بگذاریم طرف اول صفر خواهد شد.

۹۸- بعضی بجندها هستند که حل آنها منجر بحل بجندهی درجه دوم میشود؛

مثال- این بجندها را حل کنید:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{5}{4} = 0$$

طرف اول را چون یکت برخه نام تبدیل کنیم چنین میشود

$$\frac{5x^2 - 12x + 4}{4x^2} = 0$$

این برخه وقتی صفر است که برخه شمارش مساوی صفره برخه نامش مخالف صفر باشد

یعنی جواب پنجمی بالا مساوی جواب پنجمی

$$5x^2 - 12x + 4 = 0$$

است که جوابهای آن $x_1 = 2$ و $x_2 = \frac{2}{5}$ میباشد

توضیح - از ضرب دو طرف پنجمی داده شده در کوچکترین مضرب برخه

نامهایک پنجمی پیدا میشود که جوابش جواب پنجمی داده شده است

تمرین

۱- پنجمی های زیر را حل کنید:

$$\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2$$

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 1$$

$$\frac{x+1}{x} + 1 = \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{5x+4}{5x-4} + \frac{5x-4}{4x-4} = \frac{12}{x}$$

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2x+12}{x+1}$$

$$\frac{2x}{2} - \frac{2x-20}{11-2x} = 2 + \frac{2x^2-10}{2(x-1)}$$

$$\frac{2x-3}{x-2} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{2x+11}{x+1}$$

- ۲۲۹ -

$$\frac{2a-1}{a-2} + \frac{2a+1}{a-2} = \frac{5a-14}{a-2}$$

$$\frac{2}{y-1} + \frac{1}{y-2} = \frac{2}{y-2} + \frac{2}{y-2}$$

$$\frac{5}{y-a} - \frac{4}{2-a} = \frac{2}{5-a} - \frac{2}{2-a}$$

$$\frac{x}{a} \pm \frac{a}{x} = \frac{b}{x} \pm \frac{x}{b}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{a-x}{a} = \frac{2a}{x-a}$$

$$\frac{(a-x)^2 - (x-b)^2}{(a-x)(x-b)} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

$$\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 1 \left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$$

(در حل این معجزی بهتر است که $\frac{a-x}{x-b}$ را مساوی مجهول y بگیریم و پس از پیدا کردن y جواب معجزی یعنی x را بدست آوریم)

$$\frac{\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}}{1 - \frac{a-x}{a+x}} = a-1$$

$$\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a-x)^2 - (x-b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a-x)(x-b)} = \frac{a^2 - b^2}{a+b}$$

$$\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a-x)^2 + (x-b)^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

۲- میدانیم که ۱+ و ۲+ دو جواب معجزی

- ۲۳۰ -

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 28x - 24 = 0$$

است دو جواب دیگر آن را بدست آورید.

۳- m را چنان تعیین کنید که معادله

$$(m+1)x^2 - 2mx + m - 3 = 0$$

دارای دو جواب حقیقی باشد.

۴- مقدار m را پیدا کنید بطوریکه ۲- یکی از جوابهای این معادلهها

$$2x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$4x^2 + 2x^2 - 12 + 7x = 0$$

$$-x^2 - 3x^2 + x + 6 = 0$$

پس از بدست آوردن m جوابهای دیگر معادلههای بالا را پیدا کنید.

فصل دوم

روابط بین ضریبها و جوابهای همبندی درجه دوم

۹۹- دو رابطه مهم ساده بین جوابها و ضریبهای هر همبندی درجه دوم برقرار است

ازینقرار:

از جمع جوابهای همبندی $ax^2 + bx + c = 0$ نتیجه میشود

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

یعنی: مجموع دو جواب همبندی درجه دوم مساویست با «قرینه»
نسبت ضریب درجه اول ب ضریب درجه دوم.
از ضرب دو جواب همبندی درجه دوم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

یعنی: حاصل ضرب دو جواب مساویست با نسبت جمله معلوم
ب ضریب درجه دوم.

مثلاً در بچندی $3x^2 + 15x - 7 = 0$ مجموع و حاصل ضرب دو جواب مثبت چنین است:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{15}{3} = -5$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{7}{3}$$

معمولاً مجموع دو ریشه را به S و حاصل ضرب آنها را به P می‌نویسند:

$$S = -\frac{b}{a} \quad P = \frac{c}{a}$$

جای بکار بردن

۱- تعیین نشانه جوابهای بچندی درجه دوم
۱۰۰- از روی دو رابطه بالا می‌توان پیش از حل کردن بچندی نشانه دو

جواب آن را معلوم کرد.

مثال ۱- در بچندی $3x^2 - 5x + 2 = 0$ چون

$a = 3$ و $c = 2$ مثبت است بنابراین بچندی دارای دو جواب است و چون

$\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ حاصل ضرب جوابها مثبت است آن دو جواب هم‌نشانه اند و

چون حاصل جمع دو جواب یعنی $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{3}$ نیز مثبت است هر دو جواب

مثبت می‌باشد از حل بچندی نیز دو جواب مثبت 1 و $\frac{2}{3}$ می‌گیریم

مثال ۲- در بچندی $3x^2 + 5x + 2 = 0$ چون $a = 3$ و $c = 2$

و $\langle \frac{c}{a} \rangle$ است بنابراین بچندی دارای دو جواب هم نشانه است
ولی $\langle \frac{c}{a} \rangle$ - است پس هر دو جواب منفی است.

چون بچندی را حل کنیم دو جواب ۱- و $\frac{1}{2}$ - بدست میآید

مثال ۳- در بچندی $x^2 - 2x - 3 = 0$ $\langle \frac{c}{a} \rangle = -3$ و

$\langle \frac{c}{a} \rangle$ است بنابراین بچندی دارای دو جواب است که هم نشانه نیستند.

چون بچند را حل کنیم دو جواب ۳ و ۱- می‌رسیم.

۱۰۱- تبصره - هرگاه $\frac{c}{a}$ منفی باشد (و یا اینکه a و c هم نشانه

نباشند) تخمین بچندی ریشه دارد یعنی $\langle \frac{c}{a} \rangle = -4$ مثبت است زیرا چون a و c

هم نشانه نیستند بنابراین $\langle \frac{c}{a} \rangle$ است و $\langle \frac{c}{a} \rangle = -4$ است و

از آنجا $\langle \frac{c}{a} \rangle = -4$ می‌شود.

پس در حالتی که $\langle \frac{c}{a} \rangle$ است بچندی درجه دوم دو جواب

دارد و دو جواب آن هم نشانه نیستند و از روی نشانه مجموع جوابها

یعنی از روی نشانه $\frac{c}{a}$ - نشانه جوابیکه قدر مطلقش بیشتر است معلوم میشود.

بخصوص اگر $c = 0$ باشد دو جواب دو عدد قرینه اند.

مثال ۱- در بچندی $5x^2 - 3x - 2 = 0$ چون $\frac{c}{a} = -\frac{2}{5}$

منفی است پس این بچندی دارای جوابی باشد که هم نشانه نیستند و چون حاصل

جمع دو جواب یعنی $\frac{3}{5} = -\frac{6}{5}$ مثبت است بنا بر این قدر مطلق جواب مثبت
بیشتر از قدر مطلق جواب منفی است.

از حل بچندی دو جواب ۱ و $-\frac{2}{5}$ بدست میآید.

مثال ۲- در بچندی $5 = x^2 - 7x$ چون با مساوی صفر است

و $\frac{5}{x}$ منفی است بچندی دارای دو جواب قرینه می باشد $x = \pm \sqrt{\frac{5}{7}}$

تمرین

۱- بدون اینکه بچندیهای زیر را حل کنید معلوم کنید هر کدام جواب دارد یا ندارد

در صورتیکه جواب داشته باشد نشانه جوابها را معلوم کنید.

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$2x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$2x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$2x^2 + 7x - 6 = 0$$

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 7x = 0$$

$$2x^2 - 12 = 0$$

$$2x^2 + 11 = 0$$

$$-x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$5x^2 - 17x + 3 = 0$$

$$6x^2 + 15x - 21 = 0$$

$$3x^2 - 11x - 6 = 0$$

$$9x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$5x^2 - 12x + 3 = 0$$

۲- در بچندی $x^2 - 2x + 2m - 1 = 0$ نخست مقدارهای m برای

پیدا کنید تا بچندی دارای دو جواب غیر مساوی باشد دوم مقداری به m بدید تا
بچندی دارای یک جواب مضاعف شود سوم چه مقدار ثانی به m بدید تا دو جواب بچندی
هم نشا نباشند؟

۳- در بچندی $4x^2 - 24x + 50 = 0$ مطلوبست تعیین مقدار α بقسمی که یکی
از جوابهایش مساوی $\frac{1}{2}$ - شود پس از تعیین α بدون حل بچندی جواب دیگر را حساب کنید

۲- حل بعضی مسئله ها
۱۰۲- مسئله ۱- مطلوبست تعیین دو عدد بقسمی که مجموعشان S
و حاصل ضربشان P باشد

حل - میتوانیم این دو عدد را جوابهای یک بچندی درجه دوم بگیریم که اگر
آن بچندی درجه دوم را بصورت $x^2 + cx + c = 0$ بگیریم خواهیم
داشت $S = -\frac{c}{1} = -c$ و $P = \frac{c}{1} = c$ پس $S = -c$ و $P = c$
و $c = \alpha P$ بنا بر این آن بچندی باید چنین باشد:

$$x^2 - \alpha Px + \alpha P = 0$$

یا $x^2 - Sx + P = 0$ (چون $S = -c$ و $P = c$)

شرط اینکه مسئله ممکن باشد این است که $S^2 - 4P \geq 0$ یا $4\alpha^2 P - 4P \geq 0$
باشد (یعنی توان دوم مجموع از چهار برابر حاصل ضرب بزرگتر و یا الاقل برابر آن باشد)

با این شرط و عدد مطلوب عبارتند از:

$$x = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \quad x = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

بتصره - از حل این مسئله معلوم میشود که اگر مجموع و حاصل ضرب دو عدد معلوم باشد آن دو عدد جوابهای معادله درجه دوم هستند که در آن ضریب x یک و ضریب x مجموع آن دو عدد باشد. مخالف جمله معلوم مساوی حاصل ضرب آن دو عدد باشد.

تمرین

۱- دو عدد چنان تعیین کنید که مجموعشان ۱۵ و حاصل ضربشان ۵۰ باشد.

پنجین مسئله $S = ۱۰۵$, $P = ۸$

$S = a\sqrt{5}$, $P = a^2$

$S = 4R$, $P = 4R^2 - 9a^2$

$S = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $P = \sqrt{6}$

$S = ۱۰$, $P = ۲۲$

$S = ۵$, $P = ۳ - ۴$

۲- از این مسئله معلوم میشود که مجموع و حاصل ضرب دو عدد معلوم باشد آن دو عدد جوابهای معادله درجه دوم هستند که در آن ضریب x یک و ضریب x مجموع آن دو عدد باشد. مخالف جمله معلوم مساوی حاصل ضرب آن دو عدد باشد.

۱۰۳- مسئله ۲- بچندی درجه دومی تشکیل دهید که جوابهایش α و β باشند

حل این مسئله بجز محل مسئله ۱ میشود زیرا مجموع دو جواب $S = \alpha + \beta$ و حاصل

ضربشان $P = \alpha\beta$ معلوم است بنابراین α و β جوابهای این بچندی

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \quad \text{میباشند}$$

مثال- بچندی درجه دومی تشکیل دهید که جوابهایش ۲- و ۷ باشد

$$x^2 - (-2 + 7)x - 2 = 0 \quad \text{بچندی مطلوب این است}$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \quad \text{و یا}$$

تمرین

۱- بچندی درجه دومی تشکیل دهید که دارای این دو جواب باشد ۸ و ۳

همچنین قسما که دو جوابش $\sqrt{2}$ و $12 - \sqrt{2}$ باشد

" $\sqrt{3} + 1$ و $\sqrt{3} - 1$ "

" $a + b$ و $a - b$ "

" $\frac{a+b}{a-b}$ و $\frac{a-b}{a+b}$ "

۲- هر یک از بچندیهای زیر را با استفاده از حل کنید و ازین روش درستی آنها را

انتخاب کنید.

۱۰۴- مسئله ۳- بچندی درجه دومی تشکیل دهید که چون بر هر جوابش عدد

α افزوده شود جوابهای یکنحذی $\alpha x^2 + bx + c = 0$ بدست آید.

اگر y_1 و y_2 را جوابهای یکنحذی مطلوب و x_1 و x_2 را جوابهای یکنحذی $\alpha x^2 + bx + c = 0$ بگیریم خواهیم داشت:

$$y_1 = x_1 - \alpha \quad , \quad y_2 = x_2 - \alpha$$

$$y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) - 2\alpha \quad \text{پس}$$

$$y_1 y_2 = x_1 x_2 - \alpha (x_1 + x_2) + \alpha^2 \quad \text{و}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{\alpha} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{\alpha} \quad \text{و چون}$$

$$y_1 + y_2 = -\left(\frac{b}{\alpha} + 2\alpha\right) \quad \text{پس}$$

$$y_1 y_2 = \frac{c}{\alpha} + \frac{b\alpha}{\alpha} + \alpha^2 \quad \text{و}$$

و بموجب سئله ۱ این یکنحذی بدست میآید:

$$y^2 + \left(\frac{b}{\alpha} + 2\alpha\right)y + \frac{c}{\alpha} + \frac{b\alpha}{\alpha} + \alpha^2 = 0$$

تمرین

۱- یکنحذی درجه دومی تشکیل دهید که هر جوابش از جواب یکنحذی $5x^2 - 6x + 1 = 0$

۲- یکدگر باشد و یا ۲ یکدگر باشد.

۲- ندوی پیدا کنید که چون بر یکدیگر از جوابهای یکنحذی $2x^2 - 3x + 1 = 0$

افزوده شود جواب یکنحذی $2x^2 - 7x + 6 = 0$ بدست آید (بدون حل آنها)

۳- همجندی درجه دومی تشکیل دهید که بریک از جوابهایش m برابر جوابهای همجندی

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ باشد.}$$

چون مانند مسئله ۲ مجموع و حاصل ضرب جوابهای همجندی مطلوب را پیدا کنیم آن همجندی

چنین است:

$$ax^2 + mbx + mc = 0$$

۱۰۵- همجندی درجه دومی تشکیل دهید که بریک از جوابهایش قرینه جوابی

$$\text{از همجندی } ax^2 + bx + c = 0 \text{ باشد}$$

چون مانند مسئله ۲ عمل کنیم و یا اینکه در همجندی مسئله پیش بجای m عدد -1

را گذاریم همجندی مطلوب چنین میشود

$$ax^2 - bx + c = 0$$

یعنی؛ هرگاه در دو همجندی درجه دوم ضریبهای درجه اول قرینه یکدیگر باشند

و ضریبهای درجه دوم با هم مساوی و جمله های معلوم نیز با هم مساوی باشند

جوابهای آن دو همجندی متضربین هم میباشند

مثلاً جوابهای همجندی $3x^2 - 5x - 2 = 0$ قرینه جوابهای همجندی

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \text{ است}$$

۱۰۶- مسئله ۱۴- همجندی درجه دومی تشکیل دهید که جوابهایش وارث

جوابهای همبندی $ax^2 + bx + c = 0$ باشد

مجموع و حاصل ضرب جوابهای همبندی مطلوب چنین میشود:

$$S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

$$P = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}$$

پس این همبندی پیدا میشود:

$$cX^2 + bX + a = 0 \quad \text{و یا} \quad X^2 + \frac{b}{c}X + \frac{a}{c} = 0$$

این همبندی جوابهایش را رونه جوابهای همبندی $ax^2 + bx + c = 0$ است
از معایسه آنها با هم نتیجه میشود که:

هرگاه در همبندی درجه و تومی جای ضریب درجه دوم و مقدار
معلوم را با هم عوض کنیم همبندی حاصل جوابهایش را رونه
جوابهای آن همبندی میشود.

۱۰۷- مسئله ۵- مطلوبست تعیین رابطه ای بین a و b و c

بطوریکه رابطه معلومی بین جوابهای همبندی $ax^2 + bx + c = 0$
برقرار باشد.

در رابطه میان جوابها و رابطه معلوم تشکیل استومی میدهند که هرگاه جوابها را
در آن دستکاو هدف کنیم رابطه مطلوب بدست میآید.

مثال- چه رابطهای بین α و β و c برقرار باشد تا یکی از جوابهای

تجندی $c = 0$ و $\beta x + \alpha x^2$ سه برابر جواب دیگر شود؟

چون x_1 و x_2 از جوابهای این تجندی بگیریم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{\alpha} \\ x_1 = 3x_2 \end{cases}$$

از دو رابطه اول و سوم این دستگاه x_1 و x_2 را بر حسب α و β و c پیدا کرده در رابطه دوم دستگاه قرار میدهم حاصل میشود:

$$\frac{3\beta^2}{16\alpha^2} = \frac{c}{\alpha} \quad \text{یا} \quad 3\beta^2 = 16\alpha c \quad \text{این همان رابطه مطلوبست}$$

تمرین

۱- مطلوبت تعیین مقدار λ بقسبکه $(x_1 \text{ و } x_2)$ جوابهای تجندی

$$x^2 - \lambda x + 9 = 0$$

در یکی از شرطهای زیر صدق کند:

$$\text{اولاً } x_1 = x_2 \quad \text{ثانیا } x_1 = 3x_2 \quad \text{ثالثا } x_1 = \frac{1}{x_2} \quad \text{رابطه } x_1^2 + x_2^2 = 9$$

۲- راستی تعیین کنید که دو جواب تجندی

$$(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda - 2 = 0$$

مساوی کردند .

۳- x_1 و x_2 ریشه های بجندهی $\alpha x^2 + \beta x + c = 0$ میباشد

بجندهی درجه دومی تشکیل دهنده که جوابهایش $\frac{x_1}{x_2}$ و $\frac{x_2}{x_1}$ باشد .

۴- ثابت کنید که بجندهی

$$5x^2 - 2(5m + 3)x + 5m^2 + 6m + 1 = 0$$

بازار همه مقدارهای m دارای دو جواب حقیقی است .

۵- بجندهی درجه دومی تشکیل دهنده که جوابهایش عکس جوابهای بجندهی

$$\alpha x^2 + 3x - 7 = 0$$
 باشد .

۶- بجندهی درجه دومی تشکیل دهنده که جوابهایش از جوابهای بجندهی

$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$
 هفت عدد بیشتر باشد .

۷- m را چنان تعیین کنید که جوابهای بجندهی

$$8x^2 - (m-1)x + m-7 = 0$$
 در یکی از شمرهای زیر صدق کند :

۱- مساوی بر باشد (۲) قرینه یکدیگر باشد (۳) عکس بر باشد (۴) یکی مساوی صفر باشد

۸- مطلوبست تعیین ضریبهای m و q بطوریکه چون بر هر یک از جوابهای بجندهی

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
 افزود و شوند جوابهای بجندهی $x^2 - 6x + 9 = 0$ بدست آید .

۹- قطر راست گوشه ای ۵ متر و درازایش ۲۰ متر پس از پهنای آن است درازا و پهنای آن را حساب کنید.

۱۰- درازای رابی ۱۲۰ کیلومتر است و دو نفر دو چرخه سوار آن راه را می پیمایند یکی از آنها که تندیش در ساعت ۱۰ کیلومتر زیادتر از دیگری است آن راه را دو ساعت زودتر می پیماید تندی بریکت چندراست؟

۱۱- دو متحرک از دو طرف یک خط AB بدرازای ۱۲۵۰ متر بطرف یکدیگر حرکت میکنند اولی ۵ ثانیه بعد از دومی حرکت نموده و تندیش در ثانیه ۴ متر بیش از تندی دومی است تعیین کنید تندی بریکت را در صورتیکه در وسط خط AB بهم برسند.

۱۲- حساب کنید پهلوی های سه گوشه قائم الزاویه ای را که درازای پهلوی های سه گوشه درست پشت سرهم باشند.

بخط محمد افصلی

غلط‌ها را در

صنحه	سطر	غلط	درست
۶	۶	يك چند جمله	يك چند جمله را
۸	۷		انتهای دوم و سوم و چهارم را نیز
۳۸	۲	پیش از تمرین اضافه شود : تبصره	در این دو عمل نیز باید نشانه را مراعات نمود
۴۲	۱۲	(شماره صفحه ۳۵)	صفحه ۳۱
۵۱	۶	a	x
۵۹	۲	d را چهارم	d را
۶۷	۲		آخر سطر بنویسید : بر
۶۹	۱۰	دومساوی	دو نامساوی
۸۸	آخر	درازا	درازا را
۹۵	۱۴	ثانیه شمار	دقیقه شمار
۱۰۰	۳	۱۰۰ -	۱۰۰
۱۰۱	۴	ولی راه آب	ولی راه آب اول

۱۰۵ سطر آخر چنین است :

(۱) Hiéron	(۲) Syracense	(۳) Livre
۱۱	آخر	Abseisse (۱)
۱۱	۱	نشانه جهت
۱۳۱	۸-۹	مساویست :
۱۳۴	۱۰	a = ۰
۱۴۰	۷	ba' - ab'
۱۴۴	۱۲	ساده ای متوان حل
۱۵۲	۱۰	ناشد نیست
۱۵۵	۲	پیشمارند
۱۵۵	۱۳	ازین مساوی ها
۱۷۳	۱	ازین چهار مساوی

صفحه	سطر	غلط	درست
۱۸۳	۱	(صفحه ۸۹)	(صفحه ۸۹)
۱۸۳	۷	نمایش و	نمایش داده
۱۸۹	۸	بترتیب	ترتیب
۱۹۳	۲	۴۰	۴۰۱
۱۹۶	۸	۶/۳	۶°۳
۲۰۰	آخر	abcisse	abscisse
۲۰۲	۱۳	سطح	صفحه
۲۱۳	۴	همچندبهای	همچندبهای
۲۲۸	۱۵	۳x ^۲ -۸۰	۳x ^۲ -۸۰
۲۳۱	۱۳	$\frac{b^2-b^2 + \xi ac}{\xi a^2} = \frac{\xi ac}{\xi a^2}$	$\frac{b^2-b^2 + \xi ac}{\xi a^2} = \frac{\xi ac}{\xi a^2}$
۲۴۰	۱۰	عوض	عوض

۲۴۲ تمرین ۸ چنین است : مطلوبست تعیین ضریب های p و q بطوریکه چون بر هر يك از جوابهای همچندی $x^2 + px + q = 0$ يك افزوده شود جوابهای همچندی $x^2 - p^2x + pq = 0$ بدست آید .

کتاب

۵۱۲

This book is due on the date last stamped. A fine of 1 anna will be charged for each day the book is kept over time.

۳۳۸۲

CIN
M
C

~~SECRET~~

Page No. _____
Date _____
No. _____

[illegible]